

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TURBULENTO EM
VÁLVULAS AUTOMÁTICAS DE COMPRESSORES**

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

DANIEL ALBERTO SALINAS CASANOVA

FLORIANÓPOLIS, FEVEREIRO DE 2001

ANÁLISE NUMÉRICA DO ESCOAMENTO TURBULENTO EM VÁLVULAS
AUTOMÁTICAS DE COMPRESSORES

DANIEL ALBERTO SALINAS CASANOVA

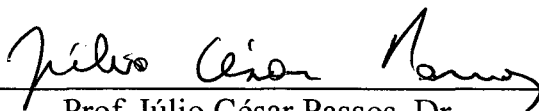
ESTA TESE FOI JULGADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

DOUTOR EM ENGENHARIA

ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA
DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

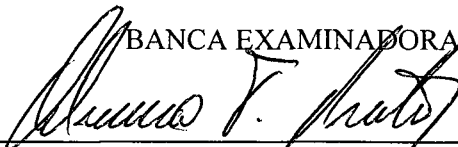
ORIENTADOR: Prof. César José Deschamps, Ph.D.

CO-ORIENTADOR: Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D.

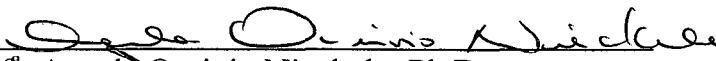


Prof. Júlio César Passos, Dr.
COORDENADOR DO CURSO

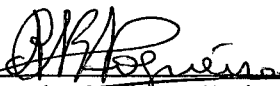
BANCA EXAMINADORA



Prof. Alvaro Toubes Prata, Ph.D. - PRESIDENTE



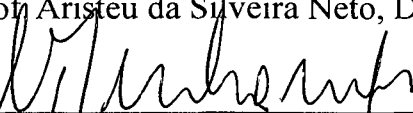
Prof.ª Angela Ourivio Nieckele, Ph.D. - RELATORA



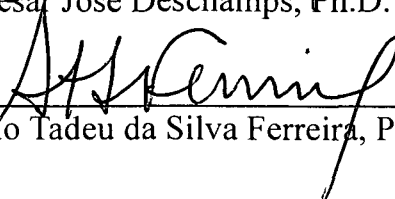
Prof. Antônio Carlos Ribeiro Nogueira, Dr. Eng.



Prof. Aristeu da Silveira Neto, Dr.



Prof. César José Deschamps, Ph.D.



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

À minha esposa Alby e à minha filha Melissa,
pela confiança, compreensão e, principalmente,
pelo AMOR recebido.

Aos meus pais, Jorge e Rebeca, pelo esforço realizado na minha formação moral e profissional, e pelo constante apoio nas diversas etapas da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter permitido a realização do presente trabalho.

Aos Professores César J. Deschamps e Alvaro T. Prata, pelo apoio, incentivo, excelente orientação e, sobre tudo, pela confiança em mim depositada.

Ao NRVA, pela infra-estrutura fornecida.

Ao governo brasileiro que, através do CNPq, forneceu o apoio financeiro para a realização do presente trabalho.

Aos colegas do NRVA que me acompanharam e incentivaram nos momentos difíceis, e que contribuíram também para a conclusão do trabalho.

Aos meus pais, pela educação, confiança e amor recebidos.

À minha esposa Alby e à minha filha Melissa, pela paciência na interminável espera para a conclusão do trabalho, pela força e compreensão nos dias difíceis que passamos juntos, e pela confiança, apoio e amor de todos os dias.

Finalmente, gostaria de agradecer a todos aqueles que de uma ou outra maneira contribuíram para a realização do presente trabalho.

CONTEÚDO

RESUMO	ix
ABSTRACT	x
LISTA DE SÍMBOLOS	xi
 1. INTRODUÇÃO	 1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivos do Trabalho	9
1.3. Organização do Documento	9
 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	 12
2.1 Introdução	12
2.2 Revisão de Trabalhos	13
2.3 Comentários Finais	31
 3. MODELAÇÃO DA TURBULÊNCIA	 33
3.1. Introdução	33
3.2. O Conceito da Média Aplicado a Escoamentos Turbulentos	36
3.3. Modelos de Turbulência	39
3.3.1. Modelo Algébrico do Comprimento de Mistura	40
3.3.2. Modelo a Uma Equação	41
3.3.3. Modelo k- ϵ para Números de Reynolds Elevados	44
3.3.4. Modelo k- ϵ para Números de Reynolds Baixos	48
3.3.5. Modelo RNG k- ϵ	49
3.3.6. Modelo k- ω	51
3.4. Condições de Contorno	53
3.5. Considerações Finais	55

4. METODOLOGIA NUMÉRICA	56
4.1. Introdução	56
4.2. Discretização das equações de Conservação	57
4.3. Acoplamento entre os Campos de Velocidade e de Pressão	64
4.4. Tratamento dos Termos Fontes	69
4.5. Prescrição das Condições de Contorno	70
4.6. Solução das Equações Discretizadas	71
 5. ESCOAMENTO TURBULENTO ATRAVÉS DE VÁLVULAS INCLINADAS	 75
5.1. Introdução	75
5.2. Formulação do Problema	76
5.2.1 Equações Governantes	79
5.2.2 Modelação da Turbulência	80
5.2.3 Transformação de Coordenadas	84
5.3. Validação do Código Computacional	89
5.3.1. Comparação com Solução Analítica	90
5.3.2. Comparação entre as Soluções obtidas com os Códigos 2D e 3D	91
5.3.3. Comparação com Resultados de Outros Autores	92
5.4. Análise dos Modelos de Turbulência	96
5.5. Validação da Solução Numérica	113
5.5.1. Refino da Malha Computacional.....	113
5.5.2. Comprimento do Orifício de Passagem	115
5.5.3. Condições de Contorno na Entrada	115
5.5.4. Comparação com Resultados Experimentais	116
5.6. Resultados e Discussão	124
5.6.1. Distribuição de Pressão em Relação à Inclinação da Palheta	124
5.6.2. Distribuição de Pressão em Relação ao Diâmetro da Palheta	143
5.6.3. Distribuição de Pressão ao Relação ao Número de Reynolds	180
5.6.4. Força Resultante na Palheta em Função de sua Inclinação	200
5.7. Conclusões	202

6. ESCOAMENTO TURBULENTO PULSANTE	204
6.1. Introdução	204
6.2. Formulação do Problema	206
6.3. Validação da Solução Numérica	208
6.4. Resultados	213
6.5. Conclusões	215
 7. CONCLUSÕES	 225
7.1. Comentários Preliminares.....	225
7.2. Conclusões Principais.....	226
7.3. Sugestões para Trabalhos Futuros	228
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 230
 APÊNDICE I - EQUAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTO k	 238
APÊNDICE II - EQUAÇÃO DA DISSIPACÃO ε	242
APÊNDICE III - ESQUEMA DE INTERPOLAÇÃO QUICK	250
APÊNDICE IV - EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO MÉDIO	256

RESUMO

O trabalho é uma análise numérica, com validação experimental, do escoamento turbulento em válvulas automáticas de compressores herméticos. Neste tipo de válvulas o escoamento é um agente promotor da abertura e do fechamento da válvula e, por esta razão, o seu entendimento é de importância crucial para a melhoria da eficiência do sistema. A geometria simplificada de difusor radial adotada no trabalho permitiu a redução dos recursos computacionais necessários para a solução do escoamento, sem no entanto diminuir a importância das conclusões obtidas. Inicialmente, o efeito da inclinação da palheta sobre o escoamento é analisado para várias posições de abertura da válvula. Posteriormente, a análise é estendida para o efeito da relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem. Finalmente, o trabalho investiga o efeito da pulsação do escoamento através da válvula.

As equações governantes do escoamento, escritas para um sistema de coordenadas não-ortogonal, são resolvidas pelo método dos volumes finitos. A modelação do escoamento turbulento é realizada com o modelo RNG $k-\epsilon$ de Yakhot e Orzag (1986) e o modelo $k-\epsilon$ para baixos números de Reynolds de Launder e Sharma (1974). A validação do modelo numérico é realizada através de uma série de testes numéricos para erros de truncamento. O desempenho dos modelos de turbulência na previsão do escoamento é examinado pela comparação de seus resultados com dados experimentais de distribuição de pressão sobre a palheta.

Os resultados demonstram que o modelo RNG $k-\epsilon$ prevê com sucesso a distribuição de pressão sobre a palheta. Por outro lado, constata-se que o modelo de Launder e Sharma (1974) prevê níveis elevados de turbulência e calcula regiões de recirculação na válvula muito menores do que as sugeridas pelas medições.

Fica demonstrada a influência significativa da inclinação da palheta sobre os campos do escoamento, afetando de forma substancial o carregamento de pressão na palheta. Encontra-se para as maiores relações de diâmetros D/d investigadas, que a força sobre a palheta pode resultar negativa, com o esforço do escoamento sendo no sentido de puxar a palheta em direção ao assento. A partir de uma determinada vazão observa-se que a distribuição de pressão sobre a palheta, escrita numa forma adimensional apropriada, torna-se independente do número de Reynolds. Por fim, conclui-se que para a geometria de válvula considerada a pulsação imposta para a vazão na válvula não tem efeito algum sobre o escoamento.

ABSTRACT

The work is an experimentally validated numerical analysis of the turbulent flow in reed type valves. Most reciprocating compressors used in domestic refrigerators employ automatic valves that open and close depending on the pressure difference across them. Despite being idealized the radial diffuser flow geometry considered here possesses a number of important features that are present in production valves.

The finite volume methodology is adopted to solve the three dimensional transport equations, with the RNG k- ϵ model of Yakhot and Orzag (1986) and the Low Reynolds Number k- ϵ model of Launder and Sharma (1974) being employed for the turbulence modeling. The numerical solution was validated by means of sensitivity tests of the results with respect to grid refinement and boundary conditions. After this, an assessment of the turbulence models was conducted with reference to experimental data of pressure distribution on the reed surface. The results show that only the RNG k- ϵ model can predict this class of flow. The poor predictions returned by the k- ϵ version of Launder and Sharma (1974) is related to overpredicted turbulence levels.

The characteristics of the three-dimensional flow with respect to the gap between the reed and the seat, and the inclination of the reed are analyzed through radial pressure profiles and property flow fields. The aforementioned analysis was carried out for different reed diameters and mass flow rate through the valve. The dynamics of the pulsating through the valve was other aspect considered in the work.

It is found that the flow field is significantly affected by the inclination of the reed, especially velocity and pressure. For the larger reed diameter tested, the pressure distribution on the reed surface shows regions of negative values that tend to pull the reed towards the seat. As the inclination of the reed is increased these regions of negative values become less dominant and eventually a positive force is restored. Above a certain mass flow rate the dimensionless pressure distribution on the reed is found to be independent of the Reynolds number. Finally, for the valve geometry and flow condition tested in the work, the pulsating flow rate condition imposed through the valve yields no effect on the flow field.

LISTA DE SÍMBOLOS

A	amplitude
a_i	coeficientes da equação discretizada ($i = p, n, s, w, e, t$ ou b)
A_i	área da face do volume de controle ($i = n, s, w, e, t$ ou b)
A_I	área nas direções do escoamento ($I = X, R$ ou θ)
a_{nb}	representa os coeficientes vizinhos ao ponto P
B	termo fonte da equação da quantidade de movimento que inclui o termo da turbulência
\bar{B}	termo fonte médio no volume de controle
$c_{\varepsilon 1}$ e $c_{\varepsilon 2}$	constantes utilizadas no modelo k - padrão ($c_{\varepsilon 1} = 1,44$; $c_{\varepsilon 2} = 1,92$)
C_k	termo de transporte de k por convecção
C_ℓ	termo utilizado para o cálculo de ν_t no volume adjacente à parede, no modelo RNG k - ($= \kappa c_\mu^{-3/4}$)
c_μ	constante de proporcionalidade ($\cong 0,09$)
$c_{\omega 2}$	constante utilizada no modelo k - ($= 0,075$)
D	diâmetro da palheta
D_e	diâmetro do domínio estendido
D_ε	difusão de
d_ε	destruição de
d_e^u	parâmetro utilizado para a correção da velocidade u na face e
d_i	parâmetro utilizado para a correção da velocidade na face i , onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
d, d_m	diâmetro do orifício de passagem
D_i	termo difusivo ($i = n, s, w, e, t$ ou b)

D_k	termo de transporte de k por difusão
D/d	diâmetro adimensional da palheta
D/d	relação entre o diâmetro da palheta e o diâmetro do orifício de passagem
e/d	comprimento adimensional do orifício de passagem
f	freqüência da pulsação (Hz)
f	freqüência dos vórtices ($\equiv k^{1/2} L^{-1}$)
f_1 e f_2	funções de correção usadas no modelo k - de Lunder e Sharma
F_i	força
F_i	fluxo na face i , onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
F_i^+	fluxo positivo ($U_i > 0$) onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
F_i^-	fluxo negativo ($U_i < 0$) onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
f_x	fator de interpolação na direção x
f, f_k e f	funções de amortecimento
h/d	afastamento adimensional entre discos paralelos
I	intensidade da turbulência ($= [2/3 k]^{1/2} / \bar{U}_{in}$)
k	energia cinética da turbulência
K	energia cinética adimensional
k_P	energia cinética turbulenta no volume centrado em P
ℓ	escala de comprimento ($\cong k^{3/2} / \varepsilon$)
ℓ_m	comprimento de mistura
L, L_μ	escalas de comprimento adimensionais ($= \ell / d$)
m	fluxo mássico
M_P	massa do volume centrado em P
n	número de intervalos de tempo ($n = 10, 90, 180, 360$ e 720)
Nu	número de Nusselt
p	flutuação da pressão
P^*	pressão adimensional ($= P + 2/3 \rho k$)
P'	pressão de correção
P_ε	produção de

P_i	número de Peclet ($i = n, s, w, e, t$ ou b)
P_k	termo da produção de k
Pr	número de Prandtl
$\frac{\Delta P}{\Delta x}$	variação da pressão na direção axial
Q	vazão volumétrica
r	raio do orifício de passagem
R	raio adimensional do orifício de passagem
R	termo relacionado à taxa de deformação do escoamento no modelo RNG k -
\hat{R}	termo R do modelo RNG k - na forma adimensional
Re	número de Reynolds
Re_m	número de Reynolds médio do escoamento ao longo dos ciclos
$Re(t)$	número de Reynolds em função do tempo
r_s/d	radio adimensional de arredondamento na saída do orifício de passagem
R_t	número de Reynolds da turbulência
$R\Delta\theta$	comprimento do volume elementar na direção circunferencial
ΔR	comprimento do volume elementar na direção radial
S	termo fonte devido à geometria do escoamento
s_c	afastamento dimensional entre a palheta e o assento da válvula
Sc	coeficiente constante no termo fonte
s_c/d	afastamento adimensional entre a palheta e o assento da válvula
S^2	termo relacionado ao tensor taxa de deformação no modelo RNG k - ($= 2 S_{ij}$)
S_{ij}	tensor taxa de deformação
S_i^+, S_i^-	termos fontes utilizados no esquema <i>QUICK</i> , onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
Sp	coeficiente da propriedade no termo fonte
St	número de Strouhal
S_t	termo fonte devido à turbulência
S_T	termo fonte adimensional da turbulência
t	tempo
T	tempo médio
Δt	variação do tempo

u, v, w	flutuações de velocidade
u_e^*	velocidade na face e , na iteração anterior
U, V, W	propriedades adimensionais (componentes de velocidade, pressão, energia cinética da turbulência e dissipação da energia cinética da turbulência, respectivamente)
\bar{U}_{in}	velocidade média na entrada do orifício de passagem
$U_{in}(t)$	velocidade em função do tempo, na entrada da válvula
\bar{u}, \bar{u}_{in}	velocidade média do escoamento na entrada do orifício de passagem
$-\overline{uv}$	tensão de Reynolds
\bar{V}	velocidade média na entrada do orifício de passagem
V	volume
\hat{V}	velocidade característica
ΔV	volume da célula
$\nabla \cdot V^*$	divergente de V^*
x	direção axial
Δx	comprimento do volume de controle na direção axial
Δx_e	distância entre os pontos nodais adjacentes P e E
Δx_w	distância entre os pontos nodais adjacentes W e P
y	distância do ponto central do volume de controle até a parede
y_v	espessura da subcamada limite viscosa
y^+	comprimento adimensional usado para definir as regiões de turbulência no escoamento

Símbolos Gregos

α	ângulo de inclinação da palheta, em relação ao assento da válvula
α	representa o inverso do número de Prandtl no modelo RNG k -
α	fator de relaxação
α_0	constante utilizada no modelo RNG k - para o cálculo de α ($\alpha_0 = 1,0$)

δ	parâmetro utilizado na transformação de coordenadas para o tratamento da inclinação da palheta
δ_{ij}	Delta de Kronecker, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$
$\delta\Delta\eta$	comprimento do volume elementar na direção axial dissipação da energia cinética da turbulência
$\tilde{\varepsilon}$	termo da dissipação utilizado no modelo k - de Launder e Sharma
ϕ	flutuação da propriedade arbitrária Φ
Φ	propriedade instantânea da propriedade arbitrária Φ
$\overline{\Phi}$	média da propriedade arbitrária Φ
Φ_{NB}	representa o valor das propriedades nos volumes vizinhos ao ponto P
γ_k	difusividade da energia cinética da turbulência
Γ	representa o produto da difusividade pela massa específica da propriedade transportada
η	termo utilizado para o cálculo de R no modelo RNG k - ($=S k / \varepsilon$)
η	parâmetro utilizado na transformação de coordenadas para o tratamento da inclinação da palheta
η_0	constante utilizada no modelo RNG k - para o cálculo do termo R ($\cong 4,38$)
κ	constante de von Karman ($= 0,42$)
μ	viscosidade molecular
ν	viscosidade cinemática
ν_t	viscosidade turbulenta
ν_e	viscosidade efetiva ($= \nu + \nu_t$)
π	constante adimensional ($= 3,1425\dots$)
θ	propriedade escalar arbitrária
θ	ângulo circunferencial
ρ	massa específica
σ_k	número de Prandtl turbulento
τ	tempo adimensional

ω	vorticidade ($\equiv k L^{-2}$)
ω	frequência angular ($=2\pi f$)

Superíndices

+	indica o sentido do fluxo positivo ($U_i > 0$) onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
-	indica o sentido do fluxo negativo ($U_i < 0$) onde $i = n, s, w, e, t$ ou b
*	indica iteração anterior
0	indica tempo anterior

Subíndices

P	indicam o volume centrado em P
$W, E, S, N,$	indicam os volumes adjacentes ao volume centrado em P
B, T	
$w, e, s, n,$	indicam as faces do volume de controle centrado em P
b, t	

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Nos estágios iniciais do desenvolvimento da refrigeração mecânica, os equipamentos usados eram volumosos, dispendiosos, pouco eficientes, e suas aplicações se restringiam à fabricação de gelo, empacotamento de carne e grandes depósitos de armazenamento. Em poucas décadas, os sistemas de refrigeração mecânica evoluíram, passando a fazer parte do dia-a-dia da sociedade, de tal maneira que na atualidade é difícil imaginar as nossas vidas sem eles. Seja para o armazenamento de alimentos, conforto humano, controle de temperatura em laboratórios e, mais recentemente, em sistemas de computadores, os sistemas de refrigeração estão sempre presentes.

Os principais métodos de refrigeração mecânica são: compressão de vapor, absorção de vapor, ciclo de ar, ejeção de vapor e termoelétrico. No entanto, a grande maioria das instalações de refrigeração, desde refrigeradores domésticos até grandes sistemas industriais, usam o princípio de compressão de vapor. Os outros sistemas são adotados em circunstâncias especiais. Nos sistemas de compressão de vapor, o efeito de refrigeração é produzido pela retirada de calor do ambiente, devido à evaporação de um líquido a baixas temperatura e pressão. Por questões de integridade ambiental, segurança, conveniência e economia, não deve ser permitido que o vapor escape e seja liberado para a atmosfera. Assim, o sistema coleta o vapor de forma contínua e condensa-o de volta ao estado líquido para que possa ser usado repetidas vezes.

Em 1834, Perkins propôs o arranjo de um sistema de refrigeração por compressão de vapor mostrado esquematicamente na Figura 1.1. Basicamente, o sistema consta de quatro componentes principais: evaporador, compressor, condensador e válvula de expansão. O fluido refrigerante, no estado líquido, é forçado a evaporar numa temperatura baixa no evaporador devido à ação conjunta do compressor e do dispositivo de expansão. Durante a evaporação, calor

é retirado do ambiente ou substância a refrigerar, produzindo assim o efeito de refrigeração. No estado de vapor, o fluido refrigerante é comprimido, elevando a sua temperatura e pressão e em seguida é levado ao condensador. No condensador o fluido refrigerante rejeita calor para um meio externo, condensando e voltando ao estado líquido. O líquido refrigerante volta então ao dispositivo de expansão e o processo se repete.

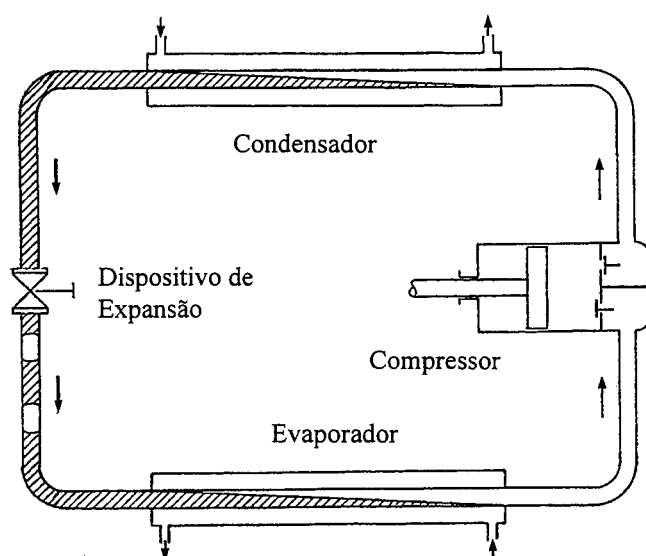


Figura 1.1: Componentes essenciais do sistema de compressão proposto por Perkins (adaptado de Gosney, 1982).

Da descrição anterior observa-se o papel importante do compressor nos sistemas de refrigeração: deslocar o fluido refrigerante e atuar sobre a diferença de pressão entre as duas linhas do sistema. Os compressores podem ser classificados em dois tipos principais: i) compressores roto-dinâmicos e ii) compressores de deslocamento positivo.

Os compressores roto-dinâmicos fornecem quantidade de movimento ao fluido que ao escoar por um difusor é transformada em pressão. Isto pode ser feito com escoamento radial ou axial. A maioria dos compressores roto-dinâmicos utilizados em refrigeração são do tipo de escoamento radial e são conhecidos como compressores centrífugos, também usualmente

chamados de turbocompressores. Os compressores de escoamento axial são usados em circunstâncias especiais, principalmente em instalações de liquefação de gás natural.

Nos compressores de deslocamento positivo a compressão do vapor é efetuada mecanicamente por um elemento de compressão. Um volume de vapor é introduzido no compressor e comprimido, diminuindo o seu volume. Durante o processo de compressão, a pressão do refrigerante aumenta até atingir o valor desejado e em seguida é liberado na linha de descarga. O compressor de deslocamento positivo não é uma máquina de escoamento contínuo; a sucção e a descarga do fluido se dão de forma alternada originando um deslocamento em pulsos.

Os principais tipos de compressores de deslocamento positivo podem ser classificados em: i) alternativo; ii) rotativo de palheta; iii) rotativo de parafuso. No compressor alternativo, o elemento de compressão é um pistão alternativo, enquanto que nos compressores rotativos o elemento de compressão pode ser uma palheta, rolo ou lóbulo. O compressor alternativo é o de uso mais difundido, sendo empregado em todos os campos da refrigeração. É especialmente usado com refrigerantes que requerem deslocamento relativamente pequeno e com condensação a pressões relativamente altas.

A faixa de aplicação dos compressores alternativos é grande, podendo ser encontrados em pequenos refrigeradores domésticos, como também em grandes instalações industriais. Devido à sua durabilidade e eficiência nas mais variadas condições de operação, e por serem economicamente fabricados em uma ampla variedade de tamanhos e projetos, os compressores alternativos têm uma grande aceitação.

A Figura 1.2 apresenta um esquema do compressor alternativo com o pistão exposto em quatro posições ao longo do seu deslocamento no cilindro. No processo de admissão, o pistão se move de cima para baixo e vapor a baixa pressão é aspirado da linha de admissão para dentro do cilindro, através das válvulas de sucção. Durante a compressão, o pistão é deslocado de baixo para cima, comprimindo o vapor contido no cilindro. A pressão do vapor aumenta até atingir um determinado valor, após o qual as válvulas de descarga se abrem e o vapor é descarregado a alta pressão para a linha de descarga.

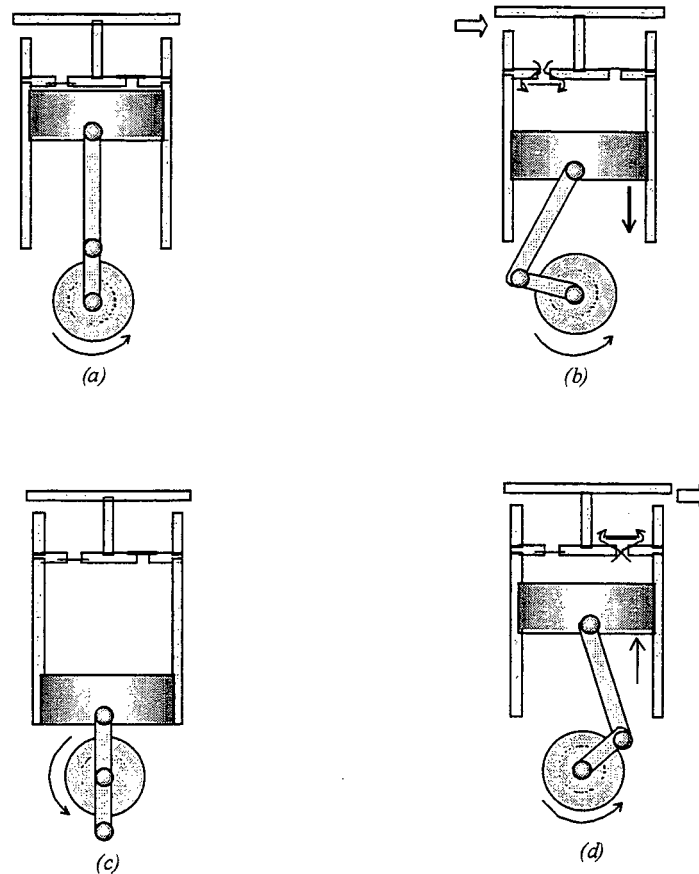


Figura 1.2: (a) Pistão no ponto morto superior; (b) Válvulas de admissão abertas; (c) Pistão no ponto morto inferior; (d) Válvulas de descarga abertas.

As válvulas de compressores podem ser distinguidas segundo o seu mecanismo de funcionamento:

- i) Válvulas automáticas, cujo movimento é controlado pela diferença de pressão, força restauradora, efeitos de inércia, fricção entre outros;
- ii) Válvulas mecânicas, cujo movimento é acoplado ao movimento do pistão.

Quase todos os compressores alternativos utilizam válvulas automáticas; denominadas assim pois os seus movimentos de abertura e de fechamento são realizados automaticamente pela diferença de pressão existente entre a câmara de sucção/admissão e o cilindro. Uma de suas

vantagens sobre as válvulas mecânicas é a adaptação automática à variação da razão de pressão. Uma outra vantagem da válvula automática é que, por não necessitar de mecanismos para o seu movimento de abertura e fechamento, resulta em um menor custo de fabricação e em uma diminuição da necessidade de manutenção. Dentro desta classe de válvulas automáticas, tem um destaque especial as válvulas do tipo palheta, muito usadas em compressores de refrigeradores domésticos e as quais são o foco de análise do presente trabalho.

Para compreender o funcionamento das válvulas automáticas em um processo típico de refrigeração por compressão, as Figuras 1.3 e 1.4 foram preparadas. Tais figuras representam, respectivamente, um diagrama da pressão no cilindro como função da posição angular da manivela e um diagrama pressão-volume teórico, de um ciclo típico de compressão.

Quando o pistão está no ponto morto superior (ponto A), tanto a válvula de admissão como a válvula de descarga estão fechadas. A válvula de admissão permanece fechada porque a pressão no volume morto é maior que a pressão na linha de admissão. Embora as pressões no volume morto e na linha de descarga serem aproximadamente iguais, a válvula de descarga se mantém fechada devido à carga da mola elástica. À medida que o pistão se move de cima para baixo, o vapor contido no volume morto se re-expande, no processo A-B, diminuindo sua pressão. Quando o pistão atinge o ponto B, a pressão no cilindro é menor que a pressão na linha de admissão, dando início à sucção de vapor para dentro do cilindro. Como mostrado nos diagramas, no processo B-C a sucção se dá a pressão constante. No ponto C, as válvulas são fechadas pela ação de mola, e a compressão começa. No processo C-D o pistão comprime o vapor no cilindro aumentando sua pressão. Quando o pistão alcança o ponto D, a pressão no cilindro é maior que a pressão na linha de descarga, e a válvula de descarga se abre, descarregando vapor a alta pressão do topo do compressor, no processo D-A. Quando o pistão retorna ao ponto A, o ciclo de compressão é completado e o eixo da manivela realizou uma rotação completa.

Os fatores que tendem a diminuir o volume de vapor deslocado da linha de baixa para a de alta pressão por curso do pistão (rotação completa do eixo da manivela) são: espaço morto, aquecimento do cilindro, efeito de trefilação e fuga nas válvulas e no pistão.

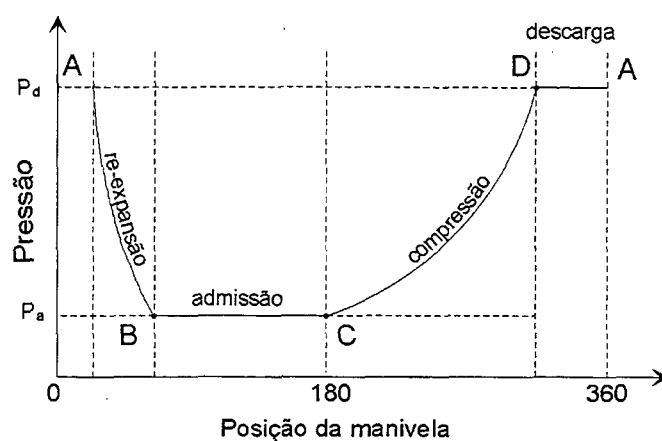


Figura 1.3: Diagrama da pressão em função da posição da manivela.

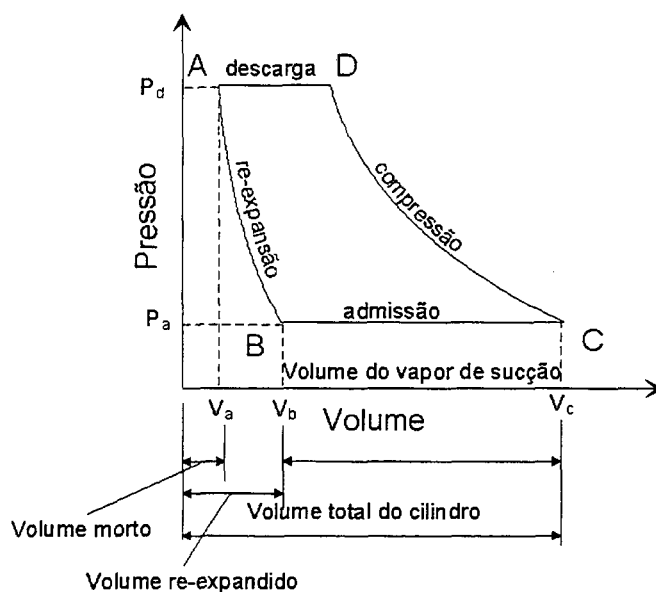


Figura 1.4: Diagrama pressão-volume de um ciclo de compressão típico.

No final do processo de compressão, uma quantidade de vapor a alta pressão permanecerá no volume morto. No início do curso de admissão, este vapor se expande novamente até que a pressão no cilindro seja menor que a pressão na linha de admissão, e as válvulas de sucção se abram permitindo o fluxo de vapor para dentro do cilindro. Devido ao volume ocupado pelo

vapor re-expandido, menor será o volume de vapor admitido por sucção no cilindro, e menor será o volume real de vapor comprimido e deslocado por curso do pistão.

O aquecimento do cilindro diminui também a eficiência volumétrica. Durante o processo de sucção, o vapor admitido no cilindro é aquecido pelas paredes quentes do cilindro, fazendo com que este se expanda ocupando maior espaço e diminuindo a quantidade de vapor que poderia ser recebida da linha de admissão.

Outro fator determinante na eficiência volumétrica é a trefilação. Trefilação é definida por Dossat (1980) como uma restrição da área de passagem para o escoamento, causando uma queda de pressão devido à fricção. Durante o processo de sucção, deve existir um diferencial de pressão entre a linha de admissão e o cilindro de maneira a superar a tensão da mola, peso e inércia da válvula. Isto indica que o vapor experimenta uma expansão na entrada do cilindro provocada pelo fluxo através das válvulas de sucção. Esta expansão implica que o volume do vapor admitido no cilindro seja menor do que aquele que seria admitido caso o processo fosse a pressão constante. Durante a compressão o processo é similar. De maneira a obter o diferencial de pressão necessário para abrir as válvulas de descarga, o vapor dentro do cilindro deve ser comprimido até uma pressão um pouco acima da pressão da linha de descarga. No final da compressão, o vapor contido no volume morto estará a uma pressão superior à qual estaria caso o vapor tivesse sido comprimido somente até a pressão da linha de descarga. Isto faz com que o vapor reexpandido ocupe maior espaço, diminuindo ainda mais o volume que poderia ser ocupado pelo vapor da linha de admissão.

As perdas de vapor ao redor do pistão e o refluxo nas válvulas de admissão ou descarga, reduzirão o volume de vapor deslocado pelo compressor, diminuindo assim a eficiência volumétrica. Após o final do processo de sucção e no início da compressão, a pressão no cilindro é maior que a pressão da linha de admissão, e como as válvulas de sucção não possuem resposta imediata, ficarão abertas ainda por um instante, permitindo que vapor do cilindro volte à linha de admissão. Nas válvulas de descarga acontece um processo similar. Logo após o final da compressão e no início do curso de admissão, a pressão no cilindro diminui fazendo com que parte do vapor da linha de descarga volte para dentro do cilindro durante o instante em que a válvula de descarga permanece aberta.

Da discussão anterior, verifica-se que a eficiência volumétrica do compressor depende em grande parte do perfeito funcionamento do sistema de válvulas. Elas devem possuir uma resposta

dinâmica adequada, baixa perda de carga e restringir ao máximo o refluxo do gás. Em um primeiro momento o movimento das válvulas é comandado pelas diferenças de pressão entre a câmara de sucção, cilindro e câmara de descarga, originadas pelos movimentos de compressão e de expansão do pistão. A partir do momento em que as válvulas estão abertas, quem passa a ser o agente responsável em mantê-las em tal posição é então o próprio campo de pressão do escoamento do refrigerante. Por este motivo, para o projeto adequado de um sistema de válvulas é fundamental o perfeito conhecimento do escoamento através das mesmas.

Apesar de sua importância, as válvulas de compressores alternativos não alcançaram ainda o mesmo estágio de desenvolvimento conseguido para outros componentes do compressor, e representam assim uma fonte significativa de perda de energia. Por este motivo, as válvulas são consideradas parte chave do projeto de um compressor, uma vez que limitam a sua eficiência.

Em geral, o projeto de válvulas inicia com o estabelecimento de suas especificações, tais como condições de funcionamento, eficiência, requerimento de manutenção ou troca, etc. Uma etapa seguinte é o esboço do projeto, no qual são incluídos uma seleção de conceitos já existentes e/ou a criação de novos. A partir desta fase, começam a ser especificados os detalhes do projeto, relativos às dimensões da válvula, material de construção e métodos de manufatura. Finalmente, uma etapa final consiste na avaliação do novo projeto, com a determinação experimental do desempenho de uma válvula teste. Baseados nos resultados dos testes experimentais, são feitas eventuais modificações no projeto e novos testes são realizados. Este processo pode ser repetido várias vezes.

De forma geral, é possível distinguir cinco etapas na evolução da metodologia de projeto de válvulas:

- i) Método puramente empírico, onde o projetista se orienta a partir de sua experiência acumulada ao longo dos anos;
- ii) Aplicação de princípios físicos simplificados para o dimensionamento da comporta e da mola da válvula (previsão da queda de pressão e do tempo de fechamento da válvula, determinação da máxima abertura);
- iii) Reconhecimento da situação física complexa e de que os métodos simplificados não são suficientes. Desenvolvimento experimental de regras-de-ação, gráficos empíricos e tabelas para o cálculo das principais dimensões;

- iv) Elaboração de uma descrição matemática mais adequada para o problema, com ênfase, principalmente, na modelagem da dinâmica da válvula;
- v) Simulação computacional como auxílio ao projeto da válvula.

Como será indicado na próxima seção, o objetivo do presente trabalho é a modelação do escoamento através de válvulas do tipo palheta como forma de entender melhor os parâmetros importantes no desempenho da válvula. Da mesma forma como realizado em diversos outros trabalhos, decidiu-se adotar para a análise do problema uma geometria simplificada de válvula, que corresponde à geometria de um difusor radial. Esta escolha, motivada por razões de economia computacional, não compromete a importância das informações aqui geradas no entendimento do escoamento em geometrias mais complexas.

1.2 Objetivos do Trabalho

Após uma revisão bibliográfica, a ser apresentada em detalhes no Capítulo 2, e constatando o número reduzido de trabalhos investigando o escoamento turbulento através de válvulas de compressores, o presente trabalho se propõe a modelar e analisar este escoamento para diferentes posições de abertura da válvula, tanto para a condição de escoamento estacionário como para o caso de escoamento pulsante. Um outro objetivo não menos importante é o de fornecer uma comparação crítica do desempenho de diferentes modelos de turbulência na previsão do escoamento.

1.3 Organização do Documento

Neste capítulo foi realizada uma introdução sucinta sobre o funcionamento do compressor, de maneira a ressaltar a importância do sistema de válvulas na sua eficiência. A seguir, no capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica de trabalhos disponíveis na literatura que estão relacionados ao tema do presente trabalho. Os objetivos da revisão são o de apresentar

os principais avanços de pesquisa na área de válvulas de compressores e o de evidenciar a necessidade de investigações adicionais.

A principal ferramenta deste trabalho é a simulação numérica de escoamentos turbulentos. No capítulo 3, apresenta-se inicialmente uma introdução sobre a necessidade de modelos para solução desses escoamentos. Em seguida são discutidos os modelos tradicionalmente adotados na literatura para então, através de uma argumentação focada no problema sendo considerado, indicar aqueles que serão adotados no trabalho. O capítulo 4 descreve as técnicas numéricas empregadas para a solução das equações associadas a cada um dos modelos de turbulência.

A modelação considerou duas situações básicas de escoamento. Na primeira, assume-se o escoamento estacionário através da válvula, com a palheta numa posição fixa de abertura e inclinada em relação ao assento. Os resultados da solução deste escoamento tridimensional são discutidos no capítulo 5. Inicialmente, foi realizada uma análise comparativa dos modelos de turbulência para definir o mais adequado para o restante da investigação. A análise do desempenho dos modelos foi conduzida tomando como referência dados experimentais de distribuição de pressão sobre a superfície da palheta. No entanto, antes desta etapa importante do trabalho foi necessária uma série de testes para a validação da solução numérica em relação a erros de truncamento e condições de contorno. Os resultados desta atividade essencial, mas dispendiosa, da análise numérica são apresentados também no capítulo 5. Após essas etapas de validação, o trabalho foi direcionado para a investigação do escoamento para diferentes parâmetros geométricos da válvula e diferentes condições de vazão. Resultados de campos de velocidade, de pressão e de quantidades turbulentas são fornecidos e comentados para cada uma das situações analisadas. O capítulo encerra com uma discussão dos resultados e com a indicação das principais conclusões.

O capítulo 6 explora o comportamento pulsante do escoamento em válvulas, considerando a palheta numa posição de abertura fixa e paralela em relação ao assento. Esta simplificação adicional da geometria foi necessária em função do custo computacional elevado para a solução do transiente. A pulsação do escoamento foi imposta através de uma variação senoidal para a vazão através da válvula.

Finalmente, o capítulo 7 apresenta uma discussão final dos resultados obtidos no trabalho, as principais conclusões e sugestões de possíveis tópicos para a continuação da pesquisa.

Ao final do trabalho é anexada uma série de apêndices. No apêndice I é mostrado em detalhes o processo de obtenção das equações de transporte para o escoamento médio, adotadas na modelação da turbulência. Os apêndices II e III trazem a dedução das equações de conservação para a energia cinética turbulenta e para a sua dissipação. No apêndice IV descreve-se o esquema de interpolação *QUICK*, usado para interpolação de propriedades do escoamento nas faces dos volumes de controle.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Como foi visto no capítulo 1, o projeto adequado de um sistema de válvulas é de grande importância na eficiência de compressores. Por outro lado, para alcançar este objetivo, é necessário o entendimento do escoamento através das válvulas. Em função da grande complexidade deste escoamento, os trabalhos encontrados na literatura têm considerado geometrias simplificadas para a análise do problema. Uma dessas geometrias é a do difusor radial com alimentação axial. Uma vista tridimensional esquemática do difusor radial e os principais parâmetros geométricos que governam o escoamento são mostrados na Figura 2.1. Como pode-se inferir da figura, o fluido entra no orifício de passagem de diâmetro d e, após ser defletido pela superfície do disco frontal, escoar radialmente. Várias configurações de escoamento podem ser obtidas pela alteração de parâmetros geométricos, tais como o afastamento s_c/d , a relação de diâmetro D/d , a inclinação do disco frontal α , etc. O escoamento é também função da vazão através do orifício, usualmente caracterizada pelo número de Reynolds, $Re (= \bar{U}_{in} d/\nu)$, baseado na velocidade média \bar{U}_{in} no orifício de passagem de diâmetro d .

Além da importância que o escoamento em difusores tem no contexto de válvulas, deve ser também mencionada sua relevância na investigação de outros problemas de interesse tecnológico, tais como mancais aeroestáticos, e impactores de aerossol, entre outros. No sentido de ter um perfeito entendimento dos mecanismos físicos associados ao escoamento em difusores radiais, vários trabalhos têm sido desenvolvidos ao longo dos anos, utilizando para isto diferentes técnicas de análise experimental, analítica e numérica. Alguns dos trabalhos mais significativos encontrados na literatura dentro deste contexto são revisados a seguir.

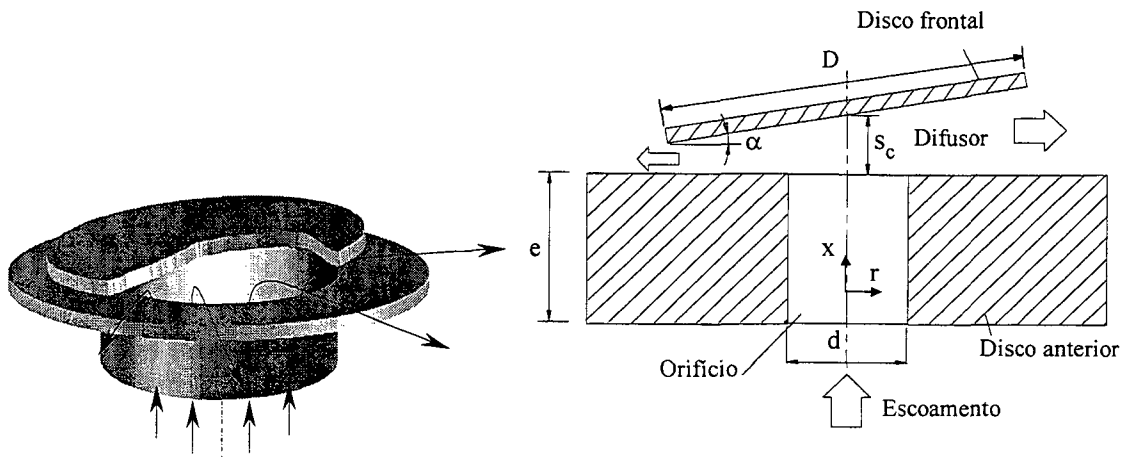


Figura 2.1: Esquema do difusor radial com alimentação axial

2.1 Revisão de Trabalhos

Woolard (1957) determinou teoricamente a distribuição de pressão para o escoamento laminar em um difusor radial com superfícies levemente curvas (Figura 2.2), usando um método integral para a solução das equações do movimento. Apesar da curvatura das superfícies do difusor, os resultados do trabalho foram comparados com dados experimentais de distribuição de pressão sobre o disco frontal para a geometria de difusor com discos paralelos. As principais contribuições do trabalho foram a de considerar na análise o desenvolvimento da camada limite na região de entrada do difusor e o fenômeno da separação do escoamento. Embora realizado para a condição de regime laminar, o autor menciona a potencialidade da metodologia em incorporar também a situação de regime turbulento. Segundo o autor, a aceleração que o escoamento experimenta devido ao pequeno afastamento entre os discos pode implicar num processo de laminarização do escoamento turbulento no orifício de passagem, fazendo com que na região do difusor o escoamento seja laminar. Comparações foram realizadas entre resultados teóricos e experimentais para afastamento adimensional $s_c/d = 0,0115$ e número de Reynolds, Re , aproximadamente igual a 50.000. De forma geral, a concordância foi satisfatória, embora não tenha sido realizada uma investigação para afastamentos mais elevados do que o indicado acima. De fato, para situações onde os discos estão mais afastados é improvável que a condição de simetria assumida para o escoamento na entrada do difusor seja fisicamente consistente com a condição de alimentação axial do escoamento.

Livesey (1960) demonstrou a importância de se considerar os termos de inércia para a caracterização correta do escoamento em um difusor radial com discos paralelos. A equação do movimento na direção radial foi resolvida, via uma formulação integral, para o escoamento laminar, incorporando o efeito das paredes. A geometria adotada na análise, mostrada na Figura 2.3, considera que o escoamento é puramente radial e possui um perfil parabólico de velocidade.

Moller (1963) apresentou uma análise teórica e experimental do escoamento incompressível no difusor com discos paralelos, considerando os regimes laminar e turbulento, e obteve uma distribuição aproximada da pressão sobre o disco frontal usando o método integral. A análise foi restringida para posições radiais suficientemente afastadas da entrada do difusor, de tal forma que efeitos de curvatura do escoamento na entrada do difusor pudessem ser desprezados. Os resultados teóricos foram comparados com os dados experimentais para $D/d = 6$, $s_c/d < 0,011$ e $Re < 21.000$. O nível de concordância foi satisfatório mas indicou, da mesma forma como já havia sido observado em outros trabalhos, a dificuldade de se prever a distribuição de pressão para afastamentos mais elevados. Através de sua observação experimental, Moller (1963) concluiu que o escoamento turbulento sofre um processo de laminarização se o número de Reynolds R_r , baseado na vazão volumétrica Q e na posição radial r no difusor ($=Q/\pi r v$), for aproximadamente igual a 2.000.

Takenaka *et al.* (1964) calcularam pelo método integral a distribuição de pressão e a força sobre o disco frontal, para os regimes laminar e turbulento. Além disto, consideraram, através de um desenvolvimento teórico, o efeito da curvatura do escoamento na entrada do difusor causada pela alimentação axial do difusor. Os resultados foram comparados com dados experimentais para três relações entre o diâmetro do disco frontal e o diâmetro do orifício de passagem, $D/d (= 1,5; 2,5 \text{ e } 3,0)$. A investigação considerou afastamentos entre os discos, s_c/d , na faixa de 0,01 a 0,23 e número de Reynolds, Re , variando de 6.000 a 90.000. A concordância entre os resultados foi razoável somente para o caso de pequenos afastamentos entre os discos ($s_c/d < 0,015$). Nesta faixa de afastamentos, concluíram via observação experimental que o escoamento entre os discos é laminar. Para afastamentos maiores, argumentaram que existe a interação de uma série de características do escoamento, tais como separação e turbulência, fazendo com que o tratamento analítico não represente de forma adequada o fenômeno. Finalmente, observaram que à medida que o disco frontal é afastado, aumentando s_c/d , a força resultante sobre sua superfície inicialmente diminui e então novamente aumenta.

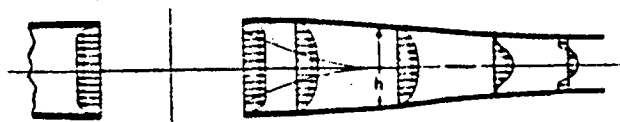


Figura 2.2: Escoamento em difusor com superfícies curvas analisado por Woolard (1957).

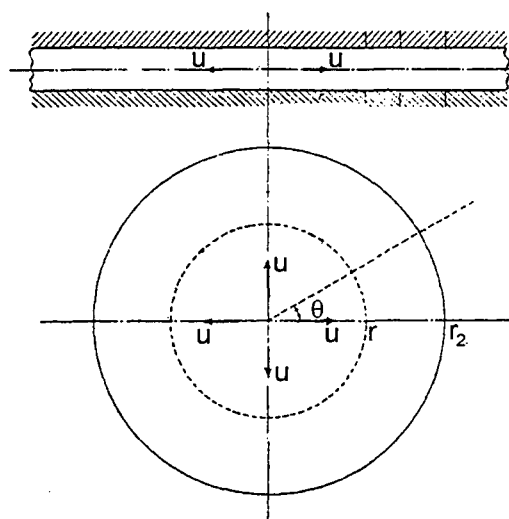


Figura 2.3: Escoamento puramente radial considerado por Livesey (1960).

Savage (1964) argumenta que a hipótese de perfil de velocidade parabólico assumida ao longo de todo o difusor no trabalho de Livesey (1960) não é consistente, exceto para o caso de escoamento puramente viscoso verificado em aplicações de lubrificação. Em função disto, o autor analisa novamente o problema usando desta vez um método de perturbação, onde as componentes de velocidade axial e radial são substituídas pela função corrente ψ . Nesta metodologia não há a necessidade da prescrição de um perfil de velocidade, com o campo do escoamento sendo resolvido a partir de condições de contorno apropriadas. Os resultados são comparados com dados experimentais e apresentam uma concordância melhor do que a obtida por Livesey (1960). A metodologia não resolve o problema da curvatura do escoamento na entrada do difusor e, assim, a solução apresenta discrepâncias na região da entrada.

Jackson e Symmons (1965) realizaram uma investigação experimental do escoamento no difusor com discos paralelos para uma relação $D/d = 48$, afastamentos s/d variando de 0,064 a

0,256 e número de Reynolds na faixa de 18.000 a 95.000. O objetivo do trabalho foi o de testar as soluções teóricas obtidas por diferentes autores para a distribuição de pressão sobre o disco frontal. Verificaram que os efeitos dos termos de inércia estimados em todas as análises teóricas eram significativamente menores dos observados experimentalmente. Além desta deficiência, Jackson e Symmons (1965) sugerem que as limitações das soluções teóricas estão associadas à não inclusão dos efeitos de gradiente adverso de pressão que podem ocorrer no difusor. Finalmente, indicam que, em função desses gradientes de pressão, podem surgir instabilidades no escoamento. Para vazões elevadas, isto pode levar ao surgimento da separação do escoamento em células que mudam sua posição com o tempo e que tornam o escoamento assimétrico. Concluem que as teorias disponíveis até então não podem resolver este tipo de situação uma vez que partem da hipótese de que o escoamento é simétrico.

O trabalho de Moller (1966) obteve a distribuição de pressão sobre o disco frontal para o escoamento compressível, considerando regiões subsônicas e supersônicas ao longo do difusor. A hipótese simplificativa de escoamento unidimensional, com variações das propriedades somente na direção radial, foi adotada para a solução numérica do problema. O efeito do atrito viscoso junto às paredes foi introduzido através de correlações de escoamento subsônico plenamente desenvolvido em canalizações. O problema foi analisado para uma relação de diâmetros D/d ($= 4,84$), considerando afastamentos, s_c/d , relativamente pequenos (0,019 a 0,030) e números de Reynolds, Re , variando entre 54.740 e 86.636. Resultados teóricos de distribuição de pressão e da posição do choque normal no difusor foram comparados com dados experimentais e mostraram boa concordância.

Killmann (1972) determinou analiticamente a distribuição de pressão sobre o disco superior para o escoamento incompressível em regime permanente e desprezando perdas por atrito viscoso. Por outro lado, para a determinação da força resultante sobre o disco frontal, o autor aplicou uma formulação integral para a conservação da quantidade de movimento e introduziu um fator de atrito para avaliar a força junto às paredes. Da mesma forma como já havia sido indicado por Takenaka *et al.* (1964), encontrou também que existe um valor de relação de diâmetro, D/d , acima do qual o aumento do afastamento provoca inicialmente uma força de atração entre os discos, depois uma condição de equilíbrio e, finalmente, a uma força de repulsão. Os resultados teóricos foram comparados com dados experimentais para o caso de uma relação

de diâmetro $D/d = 20$ e dois afastamentos s_c/d ($= 0,035$ e $0,067$) e mostraram uma boa concordância.

Uma análise numérica e experimental do escoamento em difusores radiais ($D/d = 4$) foi realizada por Marple *et al.* (1974), objetivando o entendimento de impactores de aerossol. Linhas de corrente foram obtidas experimentalmente através de uma técnica eletrolítica de visualização e serviram para a validação da solução numérica sob duas condições de vazão ($Re = 700$ e 2.300). Tendo encontrado boa concordância entre os resultados, o trabalho passou a examinar o escoamento sob diferentes condições de afastamento s_c/d ($0,125$; $0,25$ a 5) e de comprimento do orifício de passagem e/d (0 ; $0,25$; $1,0$ e $2,0$). É importante mencionar que, apesar de considerarem números de Reynolds entre 10 e 25.000 , Marple *et al.* (1974) assumiram uma formulação de escoamento laminar para todos os casos, o que é pelo menos algo questionável. A partir de perfis de velocidade ao longo do difusor, concluíram que o afastamento s_c/d e o número de Reynolds têm um efeito importante sobre o escoamento, mas que o mesmo não acontece em relação ao comprimento do orifício e/d .

Trella e Soedel (1974a) apresentaram uma metodologia para a análise do comportamento não linear de um sistema de válvula de um compressor alternativo, considerando o regime transiente, a fim de melhorar um modelo anterior que assumia a hipótese de escoamento quase-estático. Um sistema simplificado de válvula foi adotado, tomando a palheta como sendo um disco circular acoplado a uma mola, e posicionado frente a um orifício circular, como mostrado na Figura 2.4. A solução acoplada do escoamento compressível e do movimento da válvula foi obtida a partir da equação do movimento da palheta e da solução das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, segundo uma formulação integral aplicada a diferentes volumes de controle ao longo do escoamento. Para cada um desses volumes foram assumidos coeficientes de contração, a fim de avaliar o padrão das linhas de corrente ao longo do escoamento, e também efeitos de atrito viscoso. A aplicação dessa metodologia foi demonstrada em Trella e Soedel (1974b), comparando seus resultados com aqueles obtidos através de um modelo quase-estático. Dessa comparação ficou evidente que o comportamento dinâmico da palheta não pode ser descrito por uma formulação de escoamento quase-estático (Figura 2.5). Os autores não puderam validar completamente os seus resultados devido à ausência de dados experimentais mas, mesmo assim, encontraram vários aspectos também observados por outros

pesquisadores. Apesar da impossibilidade da validação, exploraram a influência de efeitos da massa, da rigidez e do diâmetro da válvula sobre sua dinâmica.

Hayashi *et al.* (1975) resolveram numericamente o escoamento através do difusor radial a fim de analisar os efeitos de separação do escoamento na entrada do difusor. As equações de transporte foram expressas através da função corrente e da vorticidade e resolvidas por diferenças finitas. Simulações foram realizadas para uma relação de diâmetros $D/d = 3,5$, afastamentos s_c/d entre 0,2 e 0,3, e vazões correspondentes a números de Reynolds entre 1 e 500. Por outro lado, através de uma bancada experimental dados de distribuição de pressão e de força sobre o disco frontal foram também gerados para relações de diâmetro $D/d = 2,0; 3,0; 3,5$ e $6,0$. A comparação entre os resultados numéricos e os dados experimentais mostraram uma boa concordância. Com base na simulação numérica e nos experimentos, os autores derivaram então uma expressão para a força resultante sobre o disco frontal, levando em consideração o tamanho da região de recirculação na entrada do difusor (Figura 2.6).

Raal (1978) resolveu o escoamento laminar incompressível entre discos paralelos pelo método de diferenças finitas para a equação de transporte de vorticidade, mas sem considerar o efeito de entrada no difusor. Observou a ocorrência da separação do escoamento para Re^* ($= \dot{m}/2\pi\mu s_c$) acima de 60, com a região de recirculação aumentando rapidamente com o número de Reynolds.

Fleming e Brown (1982) analisaram experimentalmente o comportamento transiente do escoamento estabelecido pelo movimento do disco frontal, desde sua posição em completo contato com o outro disco até o seu afastamento máximo. Sensores de fio quente foram posicionados na proximidade da saída do difusor para a medição da magnitude da velocidade ao longo do movimento de abertura do disco frontal. A relação de diâmetros utilizada foi $D/d = 1,32$. Em face de dificuldades encontradas, os resultados obtidos não foram suficientes para observações conclusivas a respeito do escoamento.

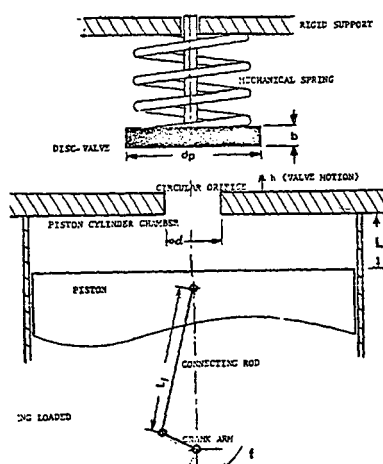


Figura 2.4: Sistema de válvula móvel investigado por Trella e Soedel (1974a).

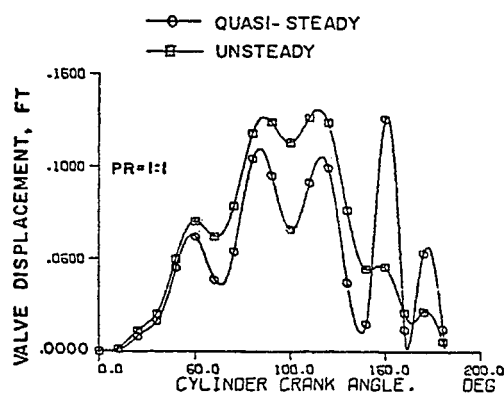


Figura 2.5: Comparação entre o deslocamento da válvula, em função do ângulo de manivela, previsto pelos modelos quasi-estático e transiente (Trella e Soedel, 1974b).

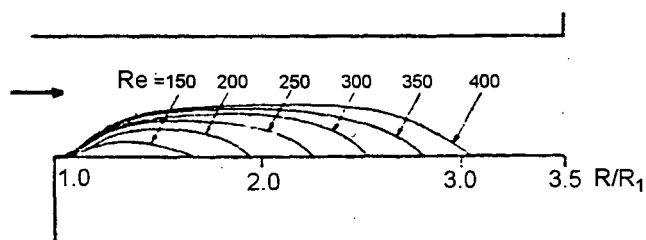


Figura 2.6: Separação do escoamento em função do número de Reynolds (Hayashi *et al.*, 1975).

Wark e Foss (1984) determinaram experimentalmente a magnitude da força resultante sobre o disco frontal para o escoamento em um difusor radial. Uma série de relações de diâmetros D/d ($= 4,0; 5,33; 8,0$ e $24,0$) foi combinada com afastamentos s_c/d na faixa de $0,013$ a $0,560$ e número de Reynolds Re entre 1.000 e 7.000 . Os resultados foram comparados com a solução analítica de Hayashi (1975), demonstrando boa concordância somente para o caso de números de Reynolds reduzidos (~ 1.000). De fato, para $Re = 4.000$ a solução analítica de Hayashi (1975) mostrou-se completamente afastada dos valores verificados experimentalmente. Wark e Foss (1984) observaram que a natureza de atração ou repulsão da força sobre o disco frontal, depende de uma combinação complexa de parâmetros tais como afastamento entre os discos, número de Reynolds e razão de diâmetros D/d .

Piechna e Meier (1986) apresentaram um estudo numérico do escoamento laminar bidimensional em um difusor radial com $D/d = 3$. O escoamento foi resolvido usando a técnica dos elementos finitos para duas situações de afastamento ($s_c/d = 0,50$ e $0,75$) e números de Reynolds, Re , variando de 12 a 360 . Além do regime permanente, o escoamento foi também resolvido para uma condição de regime transiente, impondo um movimento periódico para o disco frontal, segundo uma função senoidal e um número de Strouhal, St , de $0,27$. Os autores observaram uma região de separação do escoamento na entrada do difusor, com uma estrutura fortemente afetada pelo movimento da parede do disco frontal.

Ferreira e Driessen (1986) analisaram experimentalmente a influência dos diferentes parâmetros geométricos de difusores radiais (relação de diâmetros D/d , afastamento entre discos s_c/d , comprimento do orifício de passagem e/d , etc) sobre as áreas efetivas de força e de escoamento. A metodologia usada para a determinação experimental da área efetiva de escoamento foi aquela proposta por Soedel (1972), a qual se baseia na determinação do fluxo de massa e da queda de pressão através do difusor, bem como na massa específica do gás usado no experimento. Os autores apresentaram uma caracterização do escoamento e da distribuição de pressão sobre o disco frontal em função do afastamento entre os discos (Figura 2.7).

Ferreira *et al.* (1987) apresentaram uma análise numérica, com validação experimental, do escoamento laminar incompressível através de um difusor radial com discos paralelos, usando o método dos volumes finitos. Adotaram uma relação de diâmetros $D/d = 3$, investigando o escoamento para afastamentos, s_c/d , variando entre $0,015$ e $0,064$ e número de Reynolds, Re ,

entre 300 e 1.800. Resultados foram apresentados para a distribuição de pressão e força sobre o disco frontal, assim como perfis de velocidade ao longo do difusor.

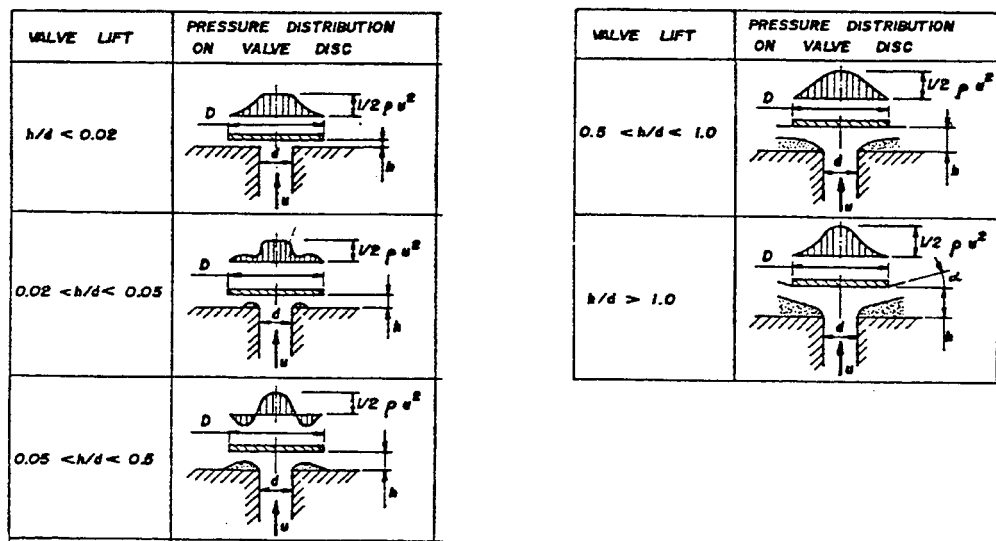


Figura 2.7: Distribuição de pressão sobre a palheta de acordo com abertura da válvula (Ferreira e Driessen, 1986).

Deschamps *et al.* (1987) analisaram o escoamento laminar através de um difusor radial com discos paralelos e concêntricos, utilizando $D/d = 3,0$. Para combinações de afastamento entre os discos ($s_c/d = 0,05$; $0,1$ e $0,2$) e número de Reynolds ($Re = 500$, 1.000 e 2.000) verificaram que a variação do comprimento do orifício de passagem, e/d , entre $0,1$ e $0,93$, não produz alteração significativa na distribuição de pressão sobre o disco frontal.

Ishizawa *et al.* (1987) apresentaram uma análise teórica e experimental do escoamento laminar incompressível em regime transiente entre dois discos paralelos, impondo um movimento oscilatório para um dos discos. A geometria adotada tinha uma relação de diâmetros $D/d = 10$, afastamentos s_c/d menores do que $0,1$ e um arredondamento na entrada do difusor a fim de evitar regiões de separação. As equações do movimento foram resolvidas por um método de expansão em série. Os resultados mostraram boa concordância com os dados experimentais.

Tabatabai e Pollard (1987) analisaram experimentalmente o escoamento turbulento entre dois discos paralelos, com ênfase no mecanismo do decaimento da turbulência, considerando

uma relação de diâmetros ($D/d \cong 10$) e um afastamento ($h/d \cong 0,08$). Observaram que para números de Reynolds elevados ($Re > 100.000$) o comportamento do escoamento é similar ao escoamento turbulento plenamente desenvolvido em canais. Em situações de números de Reynolds menores ($Re < 30.000$), constataram que a turbulência decai à medida que o escoamento progride ao longo do difusor, tornando o perfil de velocidade semelhante àquele de escoamento laminar. Concluíram que o decaimento da turbulência é lento em função do mecanismo de geração da turbulência se manter mesmo para números de Reynolds reduzidos. Os resultados mostraram a condição de equilíbrio local para números de Reynolds elevados. Por outro lado, mostraram também que a condição de equilíbrio era destruída à medida que a espessura da sub-camada limite viscosa aumentava em direção ao plano médio do afastamento entre os discos. Finalmente, Tabatai e Pollard (1987) mostraram que estruturas turbulentas de grandes escalas persistem no escoamento, argumentando que as mesmas seriam as responsáveis pela manutenção da característica turbulenta do escoamento mesmo sob um processo de laminarização.

Deschamps *et al.* (1988) realizaram uma investigação numérica do escoamento laminar em difusores radiais com o objetivo de estudar o comportamento das áreas efetivas de força e de escoamento em função da relação de diâmetro D/d ($=1,5; 2,0, 3,0$ e $5,0$) e do raio de arredondamento na saída do orifício de passagem r_s/d ($= 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,5$). A solução numérica obtida pelo método dos volumes finitos foi validada com referência a resultados experimentais de distribuição de pressão sobre o disco frontal.

Todescat *et al.* (1988) resolveram numericamente, com validação experimental, a transferência de calor para o escoamento laminar em difusores radiais, usando o método dos volumes finitos e considerando o disco frontal adiabático. Concluíram que a transferência de calor aumenta bastante com o aumento da vazão e com a diminuição do afastamento entre os discos. Uma outra observação importante foi que para cada afastamento analisado, existia uma vazão a partir da qual os resultados numéricos se afastavam dos resultados experimentais, sugerindo o aparecimento de instabilidades hidrodinâmicas.

Provavelmente a primeira tentativa para a modelação do escoamento turbulento através de difusores radiais tenha sido o trabalho de Deschamps *et al.* (1988), utilizando a versão do modelo $k-\epsilon$ para número de Reynolds elevados (Launder e Spalding, 1974). Resultados numéricos para a distribuição de pressão sobre o disco frontal foram comparados com dados experimentais para

$D/d = 3,0$ e $s_c/d = 0,05$ e duas condições de vazão ($Re = 13.325$ e 23.275). A concordância verificada na comparação não foi satisfatória (Figura 2.8) e a fonte do problema foi atribuída ao fato do modelo de turbulência utilizado não ser apropriado para a análise de escoamentos como o do difusor radial, onde ocorrem regiões de separação, de aceleração e de estagnação.

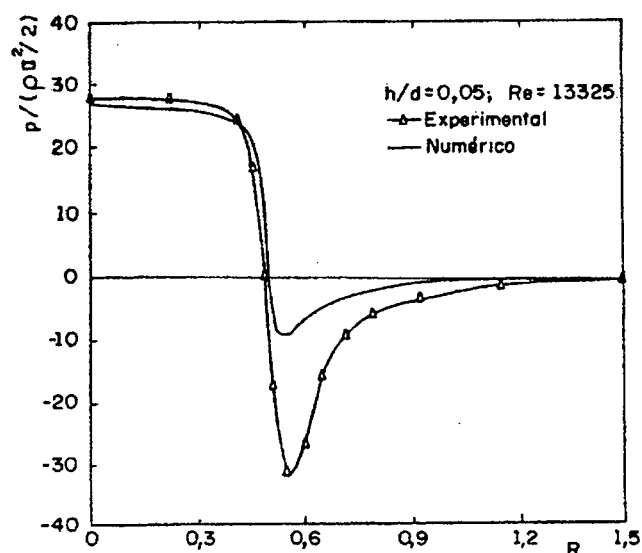


Figura 2.8: Distribuição de pressão sobre o disco frontal prevista por versão do modelo $k-\epsilon$ para altos números de Reynolds (Deschamps *et al*, 1988).

Uma situação de difusor radial com a superfície do disco frontal levemente côncava foi abordada no trabalho de Gans *et al.* (1988). Para uma relação $D/d = 5$ e afastamentos reduzidos entre os discos ($s_c/d < 0,005$), encontraram que uma concavidade extremamente pequena torna o carregamento de pressão sobre o disco frontal bem mais uniforme.

Ferreira *et al.* (1989) investigaram experimentalmente a distribuição de pressão e a força axial resultante no disco frontal ($D/d = 3$) para escoamento laminar em difusores radiais com alimentação axial. Analisaram situações para vários números de Reynolds e afastamentos entre discos, comparando os dados com resultados numéricos, de maneira a explorar o efeito de eventuais imperfeições, tanto experimentais (Figura 2.9) como numéricas.

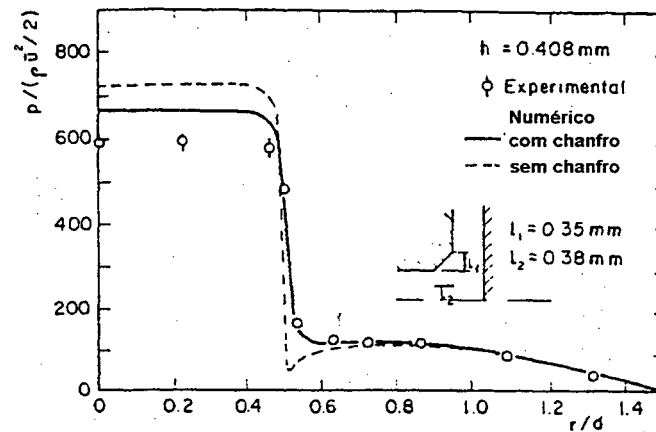


Figura 2.9: Influência da presença de um chanfro na entrada do difusor sobre a distribuição de pressão na palheta (Ferreira *et al.*, 1989).

A modelação do escoamento turbulento através de difusores radiais foi considerada novamente por Deschamps *et al.* (1989), utilizando três versões de modelo $k-\varepsilon$: i) Modelo $k-\varepsilon$ para altos números de Reynolds de Launder e Spalding (1974); ii) Modelo $k-\varepsilon$ para baixos números de Reynolds de Jones e Launder (1972) e iii) Modelo $k-\varepsilon$ para baixos números de Reynolds de Nagano e Hishida (1987). Para uma relação de diâmetros $D/d = 3$ e afastamento $s_c/d = 0,05$, verificaram que as versões do modelo $k-\varepsilon$ para baixos números de Reynolds fornecem resultados de distribuição de pressão sobre o disco frontal em melhor concordância com os dados experimentais, exceto na região de entrada do difusor, onde nenhum dos três modelos se mostrou adequado. Os autores concluíram que o pior desempenho do modelo $k-\varepsilon$ para altos números de Reynolds está associado à sua inabilidade em prever a laminarização do escoamento na entrada do difusor. Na Figura 2.10 é mostrada a distribuição de pressão sobre o disco frontal obtida experimentalmente, comparada com as previsões do modelo $k-\varepsilon$ para altos números de Reynolds de Launder e Spalding (1974) e do modelo de laminarização de Jones e Launder (1972).

Uma outra investigação experimental do escoamento turbulento incompressível entre dois discos paralelos foi a de Ervin *et al.* (1989). Utilizando anemometria de fio quente, os autores realizaram medições de componentes axiais e radiais da velocidade instantânea do escoamento, para uma relação de diâmetros ($D/d \cong 9$) e um afastamento ($s_c/d = 0,122$). A partir dos dados foram então obtidos diversos parâmetros do escoamento (perfis de velocidade média, tensões de

Reynolds, intensidade da turbulência, entre outros). Observaram que a hipótese de perfil universal de velocidade não é adequada para a região de entrada do escoamento, mas que é satisfatória em regiões mais afastadas ao longo do difusor. Além disto, verificaram que a intensidade da turbulência é bem elevada na saída do difusor, mesmo nas situações onde as tensões cisalhantes de Reynolds são de magnitudes praticamente desprezíveis.

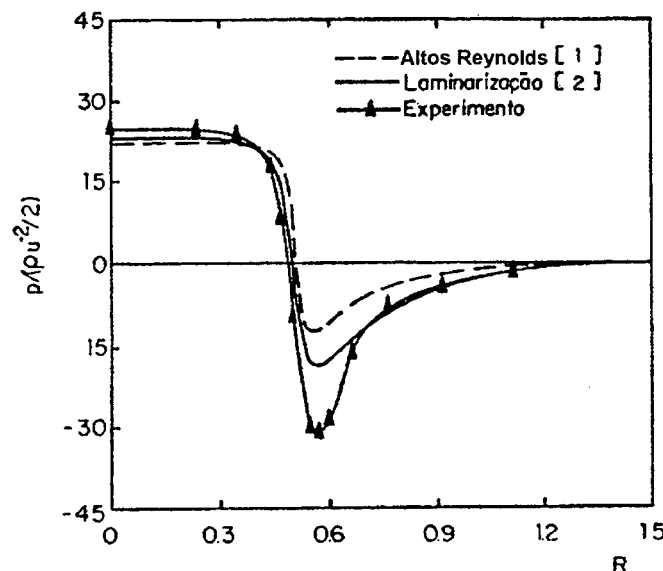


Figura 2.10: Comparação da distribuição de pressão sobre a palheta para afastamento $sc/d=0,05$ e $Re=23.275$, reproduzido de Deschamps *et al.* (1989).

Langer *et al.* (1990) investigaram numericamente o escoamento puramente radial entre discos paralelos, mantendo o afastamento constante e variando o número de Reynolds de 10 até 1000. Verificaram que para $Re < 62$ as linhas de corrente são sempre paralelas entre si e às paredes do difusor. Em $Re = 62$ surgem as primeiras regiões de recirculação no escoamento e acima de $Re = 113$ o escoamento se bifurca em configurações simétricas e assimétricas (Figura 2.11). Observaram que a bifurcação se deve à existência de múltiplas soluções para as equações de Navier-Stokes.

Prata e Ferreira (1990) apresentam uma análise de vários aspectos do escoamento e da transferência de calor no contexto de válvulas de compressores, a partir de resultados de investigações realizadas para a geometria de difusor radial, considerando os regimes laminar e turbulento.

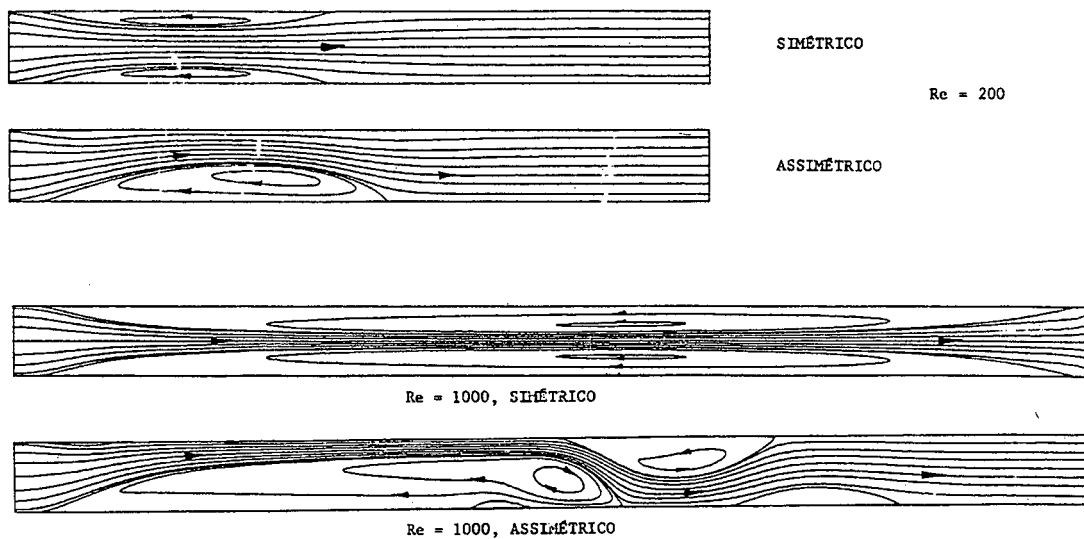


Figura 2.11: Linhas de corrente para diversos números de Reynolds (Langer *et al.*, 1990).

O problema da transferência de calor em difusores radiais foi analisado por Prata *et al.* (1991) e Prata *et al.* (1995) usando uma abordagem numérica e experimental. Adotando uma relação de diâmetros ($D/d = 4,15$), a investigação foi realizada para duas condições de afastamentos ($s_c/d = 0,07$ e $0,1$) e números de Reynolds, Re , variando entre 600 e 4.600. Valores locais para a transferência de calor foram obtidos experimentalmente sobre a superfície do disco frontal, usando uma técnica baseada na sublimação de naftaleno. Prata *et al.* (1991) consideraram dois tipos de escoamento: a) puramente radial e b) e radial com alimentação axial. Para o caso de escoamento puramente radial encontraram que para números de Reynolds suficientemente elevados o escoamento deixa de ser estável devido à gradientes adversos de pressão, dando origem a oscilações no padrão do escoamento e à separação do escoamento em células que mudam de posição com o tempo. Para a situação de escoamento com alimentação axial, encontraram também uma condição de escoamento instável que foi atribuída às bordas da saída do orifício de passagem. Concluíram que as oscilações do escoamento podem aumentar de forma dramática a transferência de calor junto às paredes do difusor. Prata *et al.* (1995) observaram um ponto de máximo para a transferência de calor na entrada do difusor, onde o escoamento sofre uma deflexão junto à superfície do disco frontal, e a partir desta posição ao longo do difusor um decréscimo progressivo das taxas de troca devido à diminuição da velocidade. No entanto, para

números de Reynolds suficientemente elevados, observaram uma quebra deste padrão e um segundo ponto de máximo para a transferência de calor foi encontrada dentro do difusor. Este fenômeno, não capturado pela solução numérica obtida pelos autores através do método dos volumes finitos, foi atribuído ao não paralelismo do escoamento, devido a regiões de separação ou instabilidades.

O efeito da excentricidade do disco frontal em relação ao orifício de passagem sobre o escoamento laminar foi analisado por Gasche *et al.* (1992). Resultados numéricos foram obtidos pelo método dos volumes finitos, para uma relação de diâmetros $D/d = 3$ e dois afastamentos s_c/d ($= 0,01$ e $0,03$), e validados através de dados experimentais. Observaram que, embora a excentricidade modifique sensivelmente os campos de pressão (Figura 2.12) e velocidade, não há alteração significativa dos parâmetros globais do escoamento, tais como áreas efetivas de força e de escoamento.

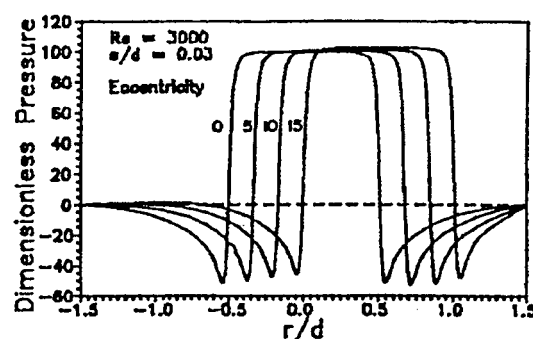


Figura 2.12: Distribuição da pressão em função da excentricidade; $Re = 1.500$ e $s_c/d = 0,03$ (Gasche *et al.*, 1992).

Langer *et al.* (1993) realizaram uma investigação numérica do efeito da instabilidade hidrodinâmica sobre a transferência de calor no escoamento puramente radial entre discos paralelos. O espaçamento entre os discos foi mantido constante, enquanto que o número de Reynolds foi variado. Verificaram que a configuração assimétrica de escoamento apresenta a maior taxa de transferência de calor, decorrente da maior agitação do fluido ao escoar por entre os discos. O número de Nusselt local para a situação assimétrica apresentou picos e vales ao longo do difusor, associados às diversas regiões de recirculação presentes no escoamento.

Peters e Prata (1995a) analisaram numericamente o problema da estabilidade hidrodinâmica em difusores radiais com alimentação radial considerado previamente por Langer *et al.* (1990), incorporando técnicas numéricas mais precisas para permitir a exploração de aspectos transientes. Detectaram uma transição de escoamento assimétrico estacionário para um padrão assimétrico transiente no escoamento. Verificaram também que para valores elevados de números de Reynolds a solução numérica é muito sensível a qualquer variação de metodologia numérica. Essas metodologias numéricas mais precisas foram também aplicadas por Peters e Prata (1995b) para o caso da transferência de calor em difusores radiais. Observaram que a melhor precisão de esquemas de interpolação, tais como o QUICK consistente de Hayase *et al.*, (1992), permitem a captura do dois pontos de máximo do número de Nusselt local como observado experimentalmente por Prata *et al.* (1995).

O trabalho de Possamai *et al.* (1995) apresenta uma análise do escoamento laminar em difusores radiais, considerando uma inclinação α para o disco frontal, sob diferentes condições de afastamento s_c/d (de 0,01 a 0,03) e números de Reynolds (de 500 a 2.000). O método dos volumes finitos foi adotado para a solução numérica do problema, validada posteriormente através da comparação com dados experimentais de distribuição de pressão adimensional $P^* = p/(\rho \bar{U}_{in}^2/2)$ sobre o disco frontal (Figura 2.13). Observaram que os campos de pressão e de velocidade são alterados de forma dramática pela inclinação do disco frontal, e este efeito aumenta com o aumento do afastamento entre os discos e do número de Reynolds. Concluíram que a assimetria da distribuição de pressão sobre o disco frontal, originada pela inclinação α , produz um momento resultante que tende a restaurar o alinhamento entre os discos.

Deschamps *et al.* (1996) resolveram numericamente o escoamento turbulento em difusores radiais com discos paralelos, utilizando o modelo de turbulência RNG $k-\varepsilon$ de Yakhot e Orszag (1986). Dados experimentais para a distribuição de pressão sobre o disco frontal foram utilizados para a validação do modelo de turbulência, em diferentes condições de relação de diâmetro, D/d , e afastamentos, s_c/d . A boa concordância observada nas comparações (Figura 2.14) fornece um indicativo de que o modelo RNG $k-\varepsilon$ pode prever o escoamento com boa precisão. Pode-se notar que os picos de pressão negativa previstos de forma satisfatória pelo modelo RNG $k-\varepsilon$ são justamente detalhes do escoamento que não puderam ser previstos por outros modelos de turbulência $k-\varepsilon$ (Deschamps *et al.*, 1988; Deschamps *et al.*, 1989). Tais regiões de decaimento de pressão estão associadas à aceleração do escoamento na entrada do

difusor, e se tornam mais intensas devido às regiões de separação do escoamento, visíveis nos resultados de linhas de corrente (Figura 2.15).

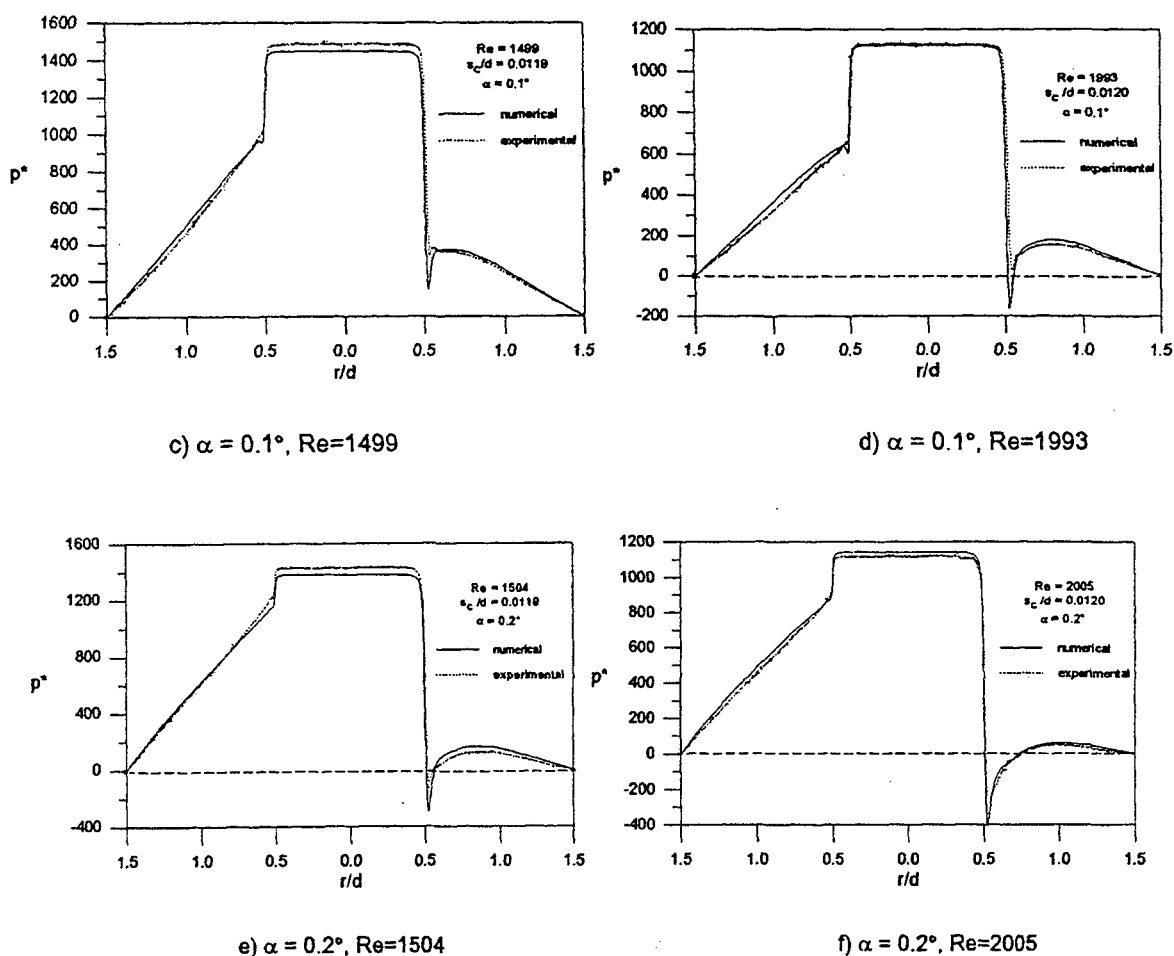


Figura 2.13: Resultados numéricos e experimentais para a distribuição de pressão sobre a superfície do disco frontal; $s_c/d=0,012$ e $D/d = 3$ (Possamai *et al.*, 1995).

Lopes e Prata (1997) desenvolveram uma metodologia numérica para a análise do escoamento em difusores radiais com discos paralelos, resolvendo a dinâmica do disco frontal segundo um modelo de um grau de liberdade. Resultados foram apresentados para a condição de escoamento periódico, imposta por uma variação senoidal da vazão na entrada do orifício de passagem. A metodologia de malhas móveis foi validada através dos dados experimentais de Ishizawa *et al.* (1987), e se mostrou promissora para a análise do comportamento dinâmico de

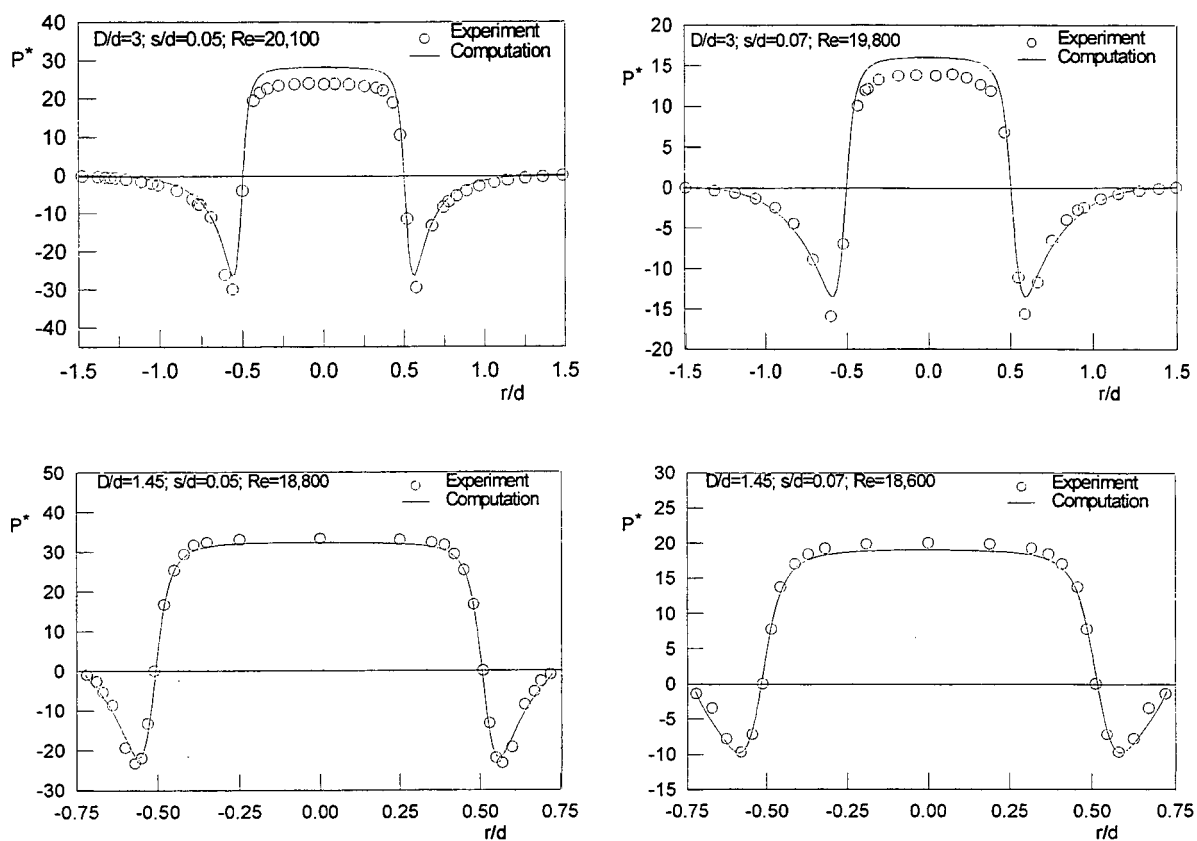


Figura 2.14: Resultados numéricos e experimentais da distribuição de pressão sobre a palheta para a relação de diâmetros $D/d=1,45$ (Deschamps *et al.*, 1996).

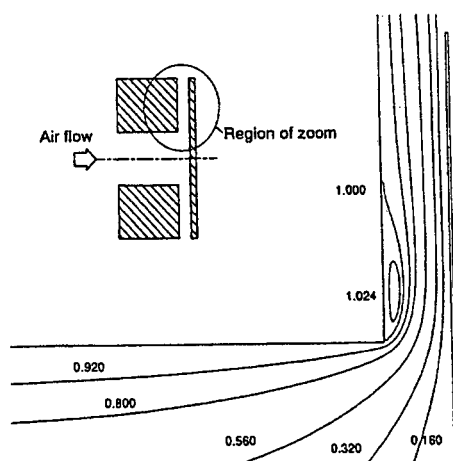


Figura 2.15: Linhas de corrente para afastamento entre discos $s/d=0,05$; $Re=10.000$ e relação de diâmetros $D/d=1,45$ (Deschamps *et al.*, 1996).

válvulas tipo palheta. A Figura 2.16 apresenta um resultado típico da variação da força resultante sobre o disco frontal ao longo do ciclo, caracterizado pela variação senoidal da velocidade na entrada do difusor.

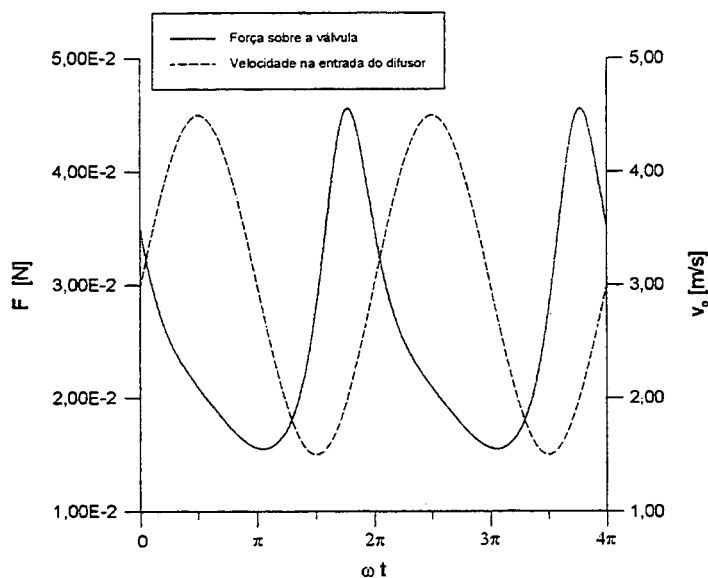


Figura 2.16: Distribuição de força sobre a palheta para escoamento periódico (Lopes e Prata, 1997).

2.3 Comentários Finais

Após a revisão bibliográfica de trabalhos relacionados ao escoamento em difusores radiais, constata-se o seguinte: i) Na quase totalidade dos trabalhos considerou-se a geometria de escoamento com discos paralelos, sendo o trabalho de Possamai *et al.* (1995) o único a investigar a situação de escoamento com disco frontal inclinado; ii) A maioria dos trabalhos, principalmente os teóricos e numéricos, considerou o regime laminar de escoamento; iii) Dos poucos trabalhos que resolveram numericamente o escoamento, verifica-se que o modelo de turbulência RNG k- ϵ é o único que prevê a distribuição de pressão sobre o disco frontal em boa concordância com os dados experimentais; iv) As análises numéricas realizadas até o momento para a condição de escoamento periódico foram para a situação de regime laminar; v) Grande parte das investigações

foram aplicadas para valores de relações de diâmetros D/d bem maior do que os adotados em válvulas de compressores.

Em função do exposto acima, e a fim de obter um melhor entendimento do escoamento, o presente trabalho tem os seguintes objetivos:

- i. Realizar uma análise numérica, com validação experimental, do escoamento turbulento estacionário em difusores com o disco frontal inclinado. Esta situação corresponde ao escoamento que seria estabelecido se a palheta fosse mantida fixa numa determinada posição de sua abertura;
- ii. Analisar o efeito de parâmetros do escoamento (tais como inclinação da palheta α , relação de diâmetros D/d e número de Reynolds Re) sobre a distribuição de pressão na palheta e campos de propriedades através da válvula;
- iii. Fornecer uma primeira investigação do escoamento turbulento pulsante através da válvula, considerando a situação simplificada de difusor radial com discos paralelos;
- iv. Oferecer uma análise crítica sobre o desempenho de diferentes modelos de turbulência na previsão do escoamento em válvulas.

MODELAÇÃO DA TURBULÊNCIA

3.1 Introdução

A análise de escoamentos é uma atividade extremamente importante em nível tecnológico. Na grande maioria das situações prevalece no escoamento um comportamento caótico, referenciado comumente como turbulência. De fato, a idéia comum que se tem sobre a natureza de escoamentos turbulentos está geralmente relacionada ao seu movimento aleatório e desordenado. Porém, tais características não são suficientes para a completa caracterização da turbulência. Como indicado por Tennekes e Lumley (1972), não há uma definição exata para a turbulência mas sabe-se, no entanto, que ela deve possuir uma série de características:

- Irregularidade – Todos os escoamentos turbulentos são aleatórios. Por este motivo, ao invés de um enfoque determinístico, métodos estatísticos devem ser empregados para as suas descrições.
- Difusividade – Observações experimentais revelam que a turbulência resulta em um aumento considerável da difusividade, originando desta forma um incremento nas taxas de transferência de propriedades do escoamento, tais como quantidade de movimento e grandezas escalares. Esse aumento da difusividade é uma característica de grande interesse em aplicações de engenharia, podendo, por exemplo, ser utilizado para a aumentar a eficiência de trocadores de calor, prevenir a separação da camada limite em aerofólios, etc.
- Números de Reynolds Elevados – A turbulência surge pela instabilidade de escoamentos laminares na presença de números de Reynolds elevados. Tais instabilidades estão relacionadas à importância relativa entre os termos viscosos e os termos de inércia na equação do movimento. Esta interação é muito complexa e não pode ser descrita de forma completa com as ferramentas matemáticas disponíveis atualmente.

- Rotacional e Tridimensional – Uma condição necessária para a existência da turbulência é a de que o escoamento seja rotacional, uma vez que os fenômenos físicos presentes no processo de transição de escoamento laminar para escoamento turbulento envolvem a geração de vorticidade. É possível se obter uma equação de transporte para a vorticidade a partir da equação de Navier-Stokes. Verifica-se que para o caso de escoamento bidimensional, o termo de produção da vorticidade é nulo e, portanto, conclui-se que todo e qualquer escoamento turbulento deve ser tridimensional.
- Dissipativa – O atrito viscoso intenso no escoamento turbulento resulta na transformação de energia cinética em energia interna. Quanto maior for a intensidade da turbulência, maior será a dissipação viscosa. Desta forma, a turbulência precisa de um suprimento contínuo de energia para se manter, caso contrário ela decai rapidamente.
- Contínuo – As menores escalas de comprimento do movimento turbulento são, com raras exceções, muito maiores do que o caminho livre médio entre as moléculas. Sendo assim, a turbulência pode ser considerada um fenômeno contínuo e, como tal, descrita pelas equações de Navier-Stokes.

Os primeiros modelos para a descrição da transferência de quantidade de movimento e de energia (ou outra propriedade) em escoamentos turbulentos se baseavam essencialmente na identificação de grandezas adimensionais para a caracterização do escoamento. Os modelos assim desenvolvidos relacionam, por exemplo, quantidades tais como o número de Nusselt, Nu , em função de parâmetros tais como o número de Reynolds, Re , e o número de Prandtl, Pr . Embora úteis, essas correlações são via de regra limitadas à geometria do problema e às faixas de Re e de Pr para as quais foram ajustadas experimentalmente.

Com o surgimento dos primeiros computadores digitais, análises mais elaboradas tornaram-se possíveis através da aplicação de técnicas numéricas para a solução das equações diferenciais governantes do escoamento. Este tipo de análise, normalmente referenciada como Mecânica dos Fluidos Computacional, está hoje bem consolidada e, em princípio, se constitui numa ferramenta extremamente flexível, uma vez que a característica do escoamento pode ser facilmente modificada pela simples alteração das condições de contorno, ou parâmetros físicos, introduzidos no procedimento de cálculo. Esta flexibilidade, aliada ao aumento contínuo da capacidade de processamento dos novos computadores (a custos cada vez mais baixos) e ao desenvolvimento de técnicas numéricas mais eficientes, explica o porquê da Mecânica dos

Fluidos Computacional ser hoje um dos métodos mais empregados para a análise de escoamentos.

Apesar desses avanços na área de processamento computacional, e do fato das equações de Navier-Stokes serem adequadas para a descrição rigorosa do fenômeno da turbulência, não há expectativa da solução numérica de escoamentos turbulentos para situações de interesse industrial em um futuro próximo. O problema é que o escoamento turbulento é sempre tridimensional e transiente, caracterizando-se pela presença de uma larga faixa de escalas de comprimento e de tempo, que requerem níveis de discretização espacial e temporal extremamente pequenos para a sua correta caracterização. Desta forma, as simulações numéricas diretas (SND) das equações de Navier-Stokes realizadas até hoje se restringem a situações relativamente simples de escoamentos turbulentos. A magnitude dos recursos computacionais envolvidos nessas simulações indica que a solução direta de escoamentos complexos terá que ser aguardada ainda por muitas décadas. Deve-se ressaltar, no entanto, que simulações deste tipo permitem a obtenção de informações sobre parâmetros de difícil, ou impossível, medição experimental. Por esta razão, a simulação direta tem sido utilizada para o melhor entendimento da turbulência e também para o refino de modelos utilizados para a sua descrição.

Uma outra alternativa para a solução numérica de escoamentos turbulentos recebe o nome de Simulação de Grandes Escalas (SGE) e é similar à SND no sentido que resolve, pelo menos em parte, a turbulência como um problema tridimensional e transiente. No entanto, as discretizações espacial e temporal adotadas são direcionadas somente às maiores escalas do movimento turbulento, diminuindo consideravelmente os recursos computacionais necessários para a simulação. As pequenas escalas, de comportamento mais universal, são aproximadas pela introdução de algum modelo de turbulência simples. Apesar da redução drástica nos recursos computacionais da simulação de grandes escalas, quando comparada à simulação direta, ela é ainda impraticável para escoamentos comumente encontrados em situações de engenharia. Porém, os avanços contínuos na área de recursos computacionais sugerem que essa metodologia possa ser utilizada em um futuro próximo para a análise de problemas complexos, com especial destaque para escoamentos com transientes rápidos.

No presente trabalho, o conceito de média introduzido por Reynolds (1895) é adotado para a simplificação do problema em mãos. Aplicando esta definição a todas as quantidades envolvidas no escoamento, pode-se deduzir uma equação para a descrição do escoamento médio

através de uma média temporal das equações de Navier-Stokes. Este método é uma espécie de filtro que remove as flutuações das variáveis dependentes, permitindo o uso de malhas bem menos refinadas, o emprego de hipóteses simplificativas (tais como, escoamento bidimensional, regime permanente, etc) e, como consequência, uma redução drástica dos recursos computacionais requeridos. Uma descrição detalhada do método é apresentada a seguir.

3.2 O Conceito de Média Aplicado a Escoamentos Turbulentos

O campo de velocidade instantâneo de um escoamento turbulento é descrito pelas equações de Navier-Stokes:

- Conservação da Massa,

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

- Conservação da Quantidade de Movimento na direção x_i

$$\frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{U}_j \tilde{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \tilde{\mu} \left[\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{U}_k}{\partial x_k} \right] \right\} + \tilde{F}_i \quad (3.2)$$

onde \tilde{F}_i é uma força de corpo instantânea. Todas as quantidades aparecendo nas equações acima podem apresentar flutuações decorrentes da turbulência. Considerando-se que as variações da massa específica $\tilde{\rho}$ e da viscosidade $\tilde{\mu}$ sejam suficientemente pequenas de tal forma que seus efeitos sobre a turbulência possam ser desprezados. Uma outra hipótese que será assumida é a de escoamento incompressível. Com estas hipóteses, as equações (3.1) e (3.2) podem ser reescritas como:

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial t} + \tilde{U}_j \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\tilde{F}_i}{\rho} \quad (3.4)$$

As equações (3.3) e (3.4) se constituem na representação matemática dos valores instantâneos das propriedades do escoamento. Como discutido anteriormente, apesar da simulação numérica de escoamentos tridimensionais transientes ser uma tarefa relativamente comum, os recursos necessários para a solução de todas as escalas do movimento turbulento, de forma total ou parcial, estão ainda fora de alcance para situações de engenharia. Além disto, embora informações sobre quantidades instantâneas sejam relevantes, em muitas situações é suficiente uma descrição do escoamento médio. Por este motivo, ao invés de se concentrar na solução de tais quantidades, a maior parte das simulações numéricas adota uma descrição estatística do escoamento. De acordo com essa metodologia, qualquer propriedade instantânea do escoamento, $\tilde{\Phi}$, pode ser expressa através de uma quantidade média, Φ , e de outra de flutuação, ϕ , associada à turbulência:

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \phi \quad (3.5)$$

Quando variações temporais do escoamento, não associadas à turbulência, ocorrem ao longo de escalas de tempo muito maiores do que as referentes aos maiores vórtices, uma média temporal das variáveis como definida por Reynolds (1895) torna-se conveniente:

$$\Phi = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{\Phi}_{(t)} dt \quad (3.6)$$

Pode-se observar desta equação que

$$\overline{\tilde{\phi}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{\phi}_{(t)} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \tilde{\Phi}_{i(t)} dt - \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \Phi_{i(t)} dt = 0 \quad (3.7)$$

Com essas relações, pode-se obter outras necessárias na avaliação da transferência de quantidade de movimento, calor e massa do escoamento médio:

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0 \quad (3.8)$$

uma vez que operações temporais e espaciais são comutativas.

Um aspecto importante desta média é que um grande número de escoamentos turbulentos de interesse são estacionários e assim nesses casos a simulação numérica pode ser realizada para

um único instante de tempo. Adicionalmente, as propriedades resultantes desta média para um escoamento turbulento estacionário variam muito menos espacialmente do que os valores instantâneos da turbulência. Por exemplo, em algumas situações as propriedades médias Φ podem apresentar variações significativas somente em uma ou duas direções, muito embora o escoamento instantâneo seja sempre tridimensional.

As quantidades instantâneas pressão \tilde{P} , velocidade \tilde{U}_i e força \tilde{F}_i podem ser escritas como:

$$\tilde{P} = P + p \quad (3.9)$$

$$\tilde{U}_i = U_i + u_i \quad (3.10)$$

$$\tilde{F}_i = F_i + f_i \quad (3.11)$$

Substituindo estas relações nas equações (3.3) e (3.4) e aplicando então o conceito de média às equações resultantes obtém-se:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right] + \frac{F_i}{\rho} \quad (3.13)$$

Estas equações são conhecidas como *Equações de Reynolds* e diferem em forma das equações (3.3) e (3.4) apenas pela presença da média do produto das flutuações de velocidade $\overline{u_i u_j}$, denominado *tensor de Reynolds*, o qual representa a transferência de quantidade de movimento adicional causada pela turbulência.

Embora $\overline{u_i u_j}$ tenha sua origem na não-linearidade dos termos de inércia da equação de Navier-Stokes, geralmente ele é agrupado junto à tensão viscosa no lado direito da equação de Reynolds. Por este motivo, e também pelo seu papel no aumento da difusividade da quantidade de movimento, as componentes de $\overline{u_i u_j}$ costumam ser denominadas tensões turbulentas.

Para a solução das equações de Reynolds é necessário o conhecimento do tensor de Reynolds. Desta maneira, o principal objetivo da modelação da turbulência é justamente a determinação de $\overline{u_i u_j}$. O desenvolvimento de modelos de turbulência tem sido invariavelmente

realizado com base em investigações experimentais. Mais recentemente, com a disponibilidade de computadores de grande capacidade de processamento e memória, resultados da simulação direta (SND) e de grande escalas (SGE) estão também sendo utilizados para a calibração de modelos de turbulência (Rodi et al., 1990). É importante ressaltar que, de fato, o grau de precisão de um modelo de turbulência depende essencialmente da validade das hipóteses utilizadas na sua concepção e que, portanto, o desenvolvimento desses modelos está, inevitavelmente, associado a uma compreensão fenomenológica do problema em mãos.

3.3 Modelos de Turbulência

Os modelos que serão considerados avaliam correlações envolvendo produtos de flutuações (por exemplo, $\overline{u_i u_j}$) a partir de propriedades localizadas em uma mesma posição espacial. Dentro desta classe de modelos existem diferentes metodologias para a descrição da turbulência. A maioria delas assume que os fluxos de quantidade de movimento, $\overline{u_i u_j}$, e de escalares, $\overline{u_i \theta}$, podem ser representados por um coeficiente de difusão turbulento. Outras obtêm formas modeladas de equações de transporte para $\overline{u_i u_j}$ e $\overline{u_i \theta}$. Neste trabalho, será adotada a primeira dessas metodologias.

A hipótese de que as tensões de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ são proporcionais à deformação do escoamento médio, agindo de forma análoga às tensões viscosas, foi originalmente proposta por Boussinesq (1877) através do conceito de viscosidade turbulenta. Considerando um escoamento unidirecional ao longo de uma placa plana infinita, ele propôs que assim como no caso da tensão viscosa, a contribuição da turbulência na transferência de quantidade de movimento poderia ser modelada por

$$-\overline{uv} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3.14)$$

onde u e v são as flutuações de velocidade associadas às componentes de velocidade U e V , paralela e normal à superfície, respectivamente, e y é a direção normal à superfície da placa. Em

contraste à viscosidade molecular, ν_t não é uma propriedade física do fluido mas sim uma medida local do nível da turbulência, variando de ponto a ponto e de escoamento para escoamento.

A hipótese de viscosidade turbulenta de Boussinesq foi generalizada por Kolmogorov (1942) através da seguinte expressão:

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (3.15)$$

onde o termo k representa a energia cinética das flutuações, definida como,

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3.16)$$

e δ_{ij} é o *Delta de Kronecker* (igual a 1 se $i = j$ e igual a 0 se $i \neq j$).

Substituindo a equação (3.15) na equação (3.13), e desprezando forças de corpo, F_i , tem-se:

$$\frac{\partial U_j}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu_{\text{eff}} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.17)$$

Na equação (3.17) foi introduzida a viscosidade efetiva, ν_{eff} , definida como sendo a soma das viscosidades molecular e turbulenta:

$$\nu_{\text{eff}} = \nu + \nu_t \quad (3.18)$$

Modelos seguindo esta hipótese avaliam ν_t utilizando desde simples relações algébricas até mesmo equações diferenciais. A energia cinética k não precisa ser obtida obrigatoriamente de tais modelos já que ela pode ser eliminada pela definição de uma nova pressão P^* ($= p + 2/3 \rho k$) para o escoamento.

3.3.1 Modelo Algébrico do Comprimento de Mistura (Prandtl, 1925)

Prandtl (1925) imaginou que para um escoamento turbulento ao longo de uma parede, porções de fluido se juntam e movimentam-se através de um determinado comprimento sem

alterar sua quantidade de movimento na direção x . Com base na teoria cinética dos gases, que diz que a viscosidade molecular ν é proporcional ao produto do caminho livre médio entre as moléculas pela velocidade do som no meio, Prandtl assumiu que a viscosidade turbulenta, ν_t , fosse proporcional a uma escala característica de velocidade \hat{V} multiplicada por um *comprimento de mistura* ℓ_m :

$$\nu_t \approx \hat{V} \cdot \ell_m \quad (3.19)$$

Considerando também, escoamentos onde somente a tensão \overline{uv} e o gradiente $\partial U / \partial y$ são importantes, postulou que a velocidade característica \hat{V} fosse igual ao gradiente da velocidade média vezes o comprimento de mistura:

$$\hat{V} = \ell_m \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.20)$$

Combinando as equações (3.19) e (3.20), chega-se finalmente ao *Modelo do Comprimento de Mistura*, dado pela expressão

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \quad (3.21)$$

O valor do comprimento de mistura ℓ_m varia de acordo com o tipo de escoamento. Para uma consulta sobre valores adequados de ℓ_m para diferentes situações de escoamento turbulento recomenda-se o livro de Launder e Spalding (1972).

O modelo do comprimento de mistura é apropriado para escoamentos simples, mas é de pouca utilidade em escoamentos complexos devido à dificuldade de se obter uma estimativa do comprimento de mistura. Uma outra deficiência do modelo é o fato de não levar totalmente em consideração os efeitos de mecanismos de transporte sobre o nível da turbulência.

3.3.2 Modelo a uma Equação (Prandtl, 1945)

Em função das limitações do modelo de comprimento de mistura, e para introduzir um pouco mais de informação física na avaliação da viscosidade turbulenta, ν_t , outras versões de modelos foram desenvolvidas de tal forma a incluir equações de transporte para as grandezas da

turbulência. Por exemplo, o modelo a uma equação utiliza uma equação de transporte para avaliar a energia cinética turbulenta k ($= \overline{u_i u_i} / 2$) e define a velocidade característica como sendo $u \equiv k^{1/2}$. O cálculo da viscosidade turbulenta passa então a ser realizada por

$$\nu_t = c_\mu k^{1/2} L_\mu \quad (3.22)$$

onde a constante de proporcionalidade c_μ ($\cong 0,09$) é determinada empiricamente, e L_μ é uma escala de comprimento da turbulência que deve ser determinada.

Uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta, k , pode ser obtida através dos seguintes passos: a) Troca do índice repetido j pelo índice k na equação (3.4); b) Multiplicação da equação por u_j ; c) Média da equação resultante; d) Adição de uma equação equivalente à anterior mas com os índices i e j trocando de posição; e) Contração da equação resultante (ou seja, faz-se $i = j$). A dedução é apresentada no Apêndice I e a equação resultante é:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C_k = D_k + P + \varepsilon \quad (3.23)$$

onde,

$$C_k = U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (3.24)$$

$$D_k = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.25)$$

$$P_k = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon = -\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (3.27)$$

Nesta equação, os dois primeiros termos no lado esquerdo da equação denotam a taxa de variação local e o transporte advectivo de k , respectivamente, e não necessitam ser modelados.

O termo D_k representa o transporte de k por difusão, somente transferindo energia de uma posição para outra no escoamento, não sendo responsável pela geração nem tampouco dissipação

de k . Os dois primeiros termos aparecendo em D_k estão relacionados ao transporte difusivo turbulento e são aproximados através do conceito de viscosidade turbulenta:

$$\overline{-u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \cong \gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (3.28)$$

O último termo entre colchetes em D_k refere-se ao transporte difusivo molecular de k e é somente importante em regiões onde a intensidade da turbulência é baixa (como, por exemplo, na sub-camada limite viscosa).

A difusividade γ_k é determinada através da analogia de Reynolds, que relaciona a difusividade de k com a difusividade da quantidade de movimento,

$$\gamma_k \cong \frac{\nu_t}{\sigma_k} \quad (3.29)$$

O número de Prandtl turbulento σ_k para o transporte de k é comumente assumido ser igual a 1.

O termo P_k , geralmente denominado termo de produção, representa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o mecanismo da turbulência. Em modelos baseados na hipótese da viscosidade turbulenta, o tensor $\overline{u_i u_j}$ aparecendo em P_k é aproximado utilizando a hipótese de Boussinesq, equação (3.15), resultando:

$$P_k = \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] \quad (3.30)$$

Finalmente, o último termo aparecendo na equação, ϵ , é interpretado como sendo a taxa de dissipação viscosa de k . Neste caso, a hipótese de equilíbrio local e a observação experimental, que relacionam a dissipação de energia das grandes escalas ($\sim k$) com as suas escalas de tempo ($\sim L / k^{1/2}$), produzem a seguinte estimativa para ϵ :

$$\epsilon \cong \frac{k^{3/2}}{L} \quad (3.31)$$

Fazendo as substituições acima indicadas, tem-se finalmente a forma aproximada para a equação de k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \frac{k^{3/2}}{L} \quad (3.32)$$

O modelo a uma equação é superior ao modelo do comprimento de mistura por ser capaz de levar em consideração os efeitos dos transportes advectivo e difusivo sobre o valor de ν_t . Por exemplo, em regiões de separação do escoamento, onde ocorrem pequenos gradientes de velocidade, mas onde os mecanismos de difusão e advecção são importantes, o modelo de comprimento de mistura é completamente inadequado, subestimando os valores de ν_t . Por outro lado, em regiões de escoamento sob condições de equilíbrio local os dois modelos são equivalentes.

A maior deficiência do modelo a uma equação, e também da formulação do comprimento de mistura, é a necessidade de se prescreverem escalas de comprimento para caracterização da turbulência. Esta prática, com a exceção de escoamentos de geometria simples, é de difícil execução. O ideal seria portanto determinar o valor dessas escalas também de uma equação de transporte. Este enfoque é discutido a seguir.

3.3.3 Modelo k - ε para Números de Reynolds Elevados (Launder & Spalding, 1974)

Uma alternativa para a modelação da turbulência é a utilização de *Modelos a Duas Equações*, de tal forma a se obterem as escalas de comprimento também de uma equação de transporte. Na elaboração de um modelo a duas equações faz sentido continuarmos usando a equação para a energia cinética k , devido ao pouco empirismo usado na sua obtenção. Como podemos utilizar qualquer combinação do tipo $k^a L^b$ para a segunda variável, várias propostas surgiram ao longo dos anos:

- Freqüência dos vórtices f ($\equiv k^{1/2} L^{-1}$), segundo Kolmogorov (1942);
- Produto da energia pela escala de comprimento ($k L$), segundo (Rodi e Spalding (1970);
- Vorticidade ω ($\equiv k L^{-2}$), segundo Wilcox (1988);
- Dissipação ε ($\equiv k^{3/2} L^{-1}$) da energia cinética k , segundo Harlow e Nakayama (1968) e Launder e Spalding (1974).

O modelo k - ε é sem dúvida o modelo mais utilizado para a modelação de escoamentos turbulentos, com os trabalhos de Jones e Launder (1972, 1973) e de Launder e Spalding (1974) sendo as suas principais referências.

De maneira similar ao realizado para k , uma equação de transporte de ε pode também ser deduzida de forma exata através das equações de Navier-Stokes (Apêndice II), resultando em

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}}_I &= \underbrace{-2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}_{II} - \underbrace{2\nu u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}}_{III} \\
 &\quad - \underbrace{2\gamma \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}_{IV} - \underbrace{2 \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right)^2}_{V} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]}_{VI}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

O termo I corresponde à taxa da variação local e a taxa do transporte de ε por convecção e não necessita de modelação alguma. Porém, vários outros termos na equação precisam ser aproximados. Os termos II e III representam a geração de ε devido a mecanismos associados a vorticidade e ao escoamento médio. De acordo com Tennekes e Lumley (1972), ambos podem ser desprezados em situações de números de Reynolds elevados. Os termos IV e V são, respectivamente, a geração devida ao alongamento dos vórtices e à dissipação viscosa. Finalmente, o termo VI representa a difusão de ε .

Os termos na equação de transporte de ε podem ser agrupados de tal forma a representarem mecanismos físicos distintos:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = D_\varepsilon + P_\varepsilon - d_\varepsilon \tag{3.34}$$

com D_ε , P_ε e d_ε representando os mecanismos de difusão, de produção e de destruição de ε , respectivamente. As principais técnicas para a modelação dos termos na equação de ε são a análise dimensional e a intuição física.

A difusão D_ε é aproximada segundo o conceito de difusividade turbulenta:

$$D_\varepsilon \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (3.35)$$

onde σ_ε é o número de Prandtl para ε .

Para termo de produção P_ε de ε observamos que ele deve ser escrito de tal forma que nunca permita a situação fisicamente inconsistente de um aumento ilimitado de k . Assim,

$$P_\varepsilon \equiv c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k \quad (3.36)$$

onde ε/k é o inverso da escala de tempo.

O termo de destruição d_ε na equação de ε deve tender ao infinito quando $k \rightarrow 0$, caso contrário k pode tornar-se negativo. Desta forma:

$$d_\varepsilon \equiv c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.37)$$

Usando as aproximações anteriores, o modelo k - ε para números de Reynolds elevados assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + v_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \varepsilon \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.39)$$

e

$$v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.40)$$

O valor de $c_{\varepsilon 2}$ aparecendo em (3.39) é determinado pela observação do decaimento da turbulência gerada por uma tela em um túnel de vento. De medições experimentais do decaimento de k chega-se a $c_{\varepsilon 2} = 1,92$.

A constante c_μ pode ser determinada a partir da região logarítmica do perfil de velocidade, onde o efeito da tensão viscosa é insignificante, a produção de energia cinética é igual à dissipação viscosa e a tensão de Reynolds é praticamente constante. Seguindo este procedimento o valor de c_μ resulta em 0,09.

A determinação de $c_{\epsilon 1}$ pode também ser realizada com auxílio do perfil de velocidade logarítmico e da condição de equilíbrio local. Estas condições aplicadas à equação modelada do transporte de ϵ (retendo os termos de difusão, produção e dissipação) fornecem como resultado

$$c_{\epsilon 1} = c_{\epsilon 2} - \kappa^2 / (\sigma_\epsilon c_\mu^{1/2}) \quad (3.41)$$

Podemos observar que $c_{\epsilon 1}$ é relacionado a σ_ϵ . Os escoamentos livres são muito sensíveis a mudanças nos coeficientes $c_{\epsilon 1}$ e $c_{\epsilon 2}$, tal que uma alteração de 10 % nos seus valores altera a taxa de crescimento da camada limite de mistura em torno de 40 %. Estes escoamentos são adotados para ajustar numericamente os valores de $c_{\epsilon 1}$, pelo ajuste de σ_ϵ , de tal forma que o modelo produza uma boa previsão do escoamento. O valor de $\sigma_\epsilon = 1,3$ é comumente adotado no modelo, gerando um valor de $c_{\epsilon 1} = 1,49$. No entanto, o modelo de Launder e Spalding (1974) emprega $c_{\epsilon 1}$ igual a 1,44

Seguindo os procedimentos anteriores, as constantes requeridas no modelo k- ϵ tomam os seguintes valores: $c_\mu = 0,09$; $c_{\epsilon 1} = 1,44$; $c_{\epsilon 2} = 1,92$; $\sigma_k = 1,0$ e $\sigma_\epsilon = 1,3$.

Em regiões próximas a paredes sólidas os efeitos viscosos tornam-se importantes e o modelo k- ϵ para números de Reynolds elevados não é apropriado. O procedimento do uso de funções-parede para avaliar o efeito da parede sobre o escoamento, sem que haja a necessidade de se resolver a sub-camada limite viscosa, é uma forma de contornar este problema. No entanto, muitas vezes isto traz o inconveniente de que o primeiro ponto no domínio computacional esteja posicionado a uma distância suficientemente afastada da parede, de tal forma a garantir a presença de um nível mínimo para a turbulência (por razões práticas, esta distância é tomada usualmente como $y^+ \approx 11,6$). Obviamente, em escoamentos onde fenômenos importantes acontecem junto à parede, é difícil senão impossível obter um compromisso entre a condição de intensidade para a turbulência e o refino de malha requerido. Por esta razão, muitas vezes é necessária a adoção de um modelo que possa ser aplicado através de toda a região da parede.

3.3.4 Modelo k-ε para Números de Reynolds Baixos de Launder & Sharma (1974)

Em regiões junto a superfícies sólidas onde $y^+ < 30$, o transporte difusivo molecular não pode ser desprezado e, portanto, deve ser incluído em todas as equações de transporte. Praticamente todos os modelos a duas equações utilizam alguma correção, em função de um número de Reynolds da turbulência:

$$R_t = k^2 / (\nu \epsilon) \quad (3.42)$$

Em regiões próximas a paredes sólidas, a condição de não deslizamento implica que $k \rightarrow 0$ e $\epsilon \neq 0$ quando $y \rightarrow 0$, onde y é a distância à parede. Assim, nessas regiões $R_t \rightarrow 0$. Considera-se que os efeitos viscosos começam a ser importantes quando $R_t < 100$.

O primeiro modelo k-ε para baixos números de Reynolds foi proposto por Jones e Launder (1972). Basicamente, o modelo adota a variável $\tilde{\epsilon}$ ao invés de ϵ , com o objetivo de simplificar a condição de contorno de ϵ na parede. A variável $\tilde{\epsilon}$ é definida como:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3.43)$$

Na parede, a dissipação é igual ao segundo termo do lado direito da equação (3.43) e assim, na parede, $\tilde{\epsilon} = 0$.

Visando melhorar a previsão da distribuição da energia cinética k junto à parede, Jones e Launder (1972) adicionaram na equação da dissipação um termo fonte proporcional a $\nu \nu_t (\partial^2 U_i / \partial x_k \partial x_l)^2$. Finalmente, é introduzido um fator de amortecimento

$$f_\mu = \exp \left[-3,4 / (1,0 + R_t / 50,0)^2 \right] \quad (3.44)$$

na expressão da viscosidade turbulenta

$$\nu_t = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (3.45)$$

para a correção de C_μ , de tal forma que junto à parede $f_\mu \rightarrow 0$, e longe dela $f_\mu \rightarrow 1$.

O modelo de Jones e Launder (1972) foi otimizado posteriormente por Launder e Sharma (1974), de maneira a tornar as constantes do modelo adequadas também para escoamentos livres. A versão final do modelo tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \tilde{\varepsilon} - 2\nu_t \left[\frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_j} \right]^2 \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + f_{\varepsilon 1} c_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} P_k - f_{\varepsilon 2} c_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + 2\nu_t \left[\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_l} \right]^2 \quad (3.47)$$

onde,

$$f_{\varepsilon 1} = 1,0 \quad (3.48)$$

$$f_{\varepsilon 2} = 1,0 - 0,3 \exp(-R_t^2). \quad (3.49)$$

As funções $f_{\varepsilon 1}$, $f_{\varepsilon 2}$ e f_μ são introduzidas para corrigir as constantes $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$ e c_μ em função do número de Reynolds turbulento, em regiões do escoamento sob a ação de efeitos viscosos importantes.

Os valores de c_μ , $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$, σ_k e σ_ε permanecem como no modelo k - ε para números de Reynolds elevados.

3.3.5 Modelo RNG k - ε de Yakhot e Orzag (1986)

Um outro modelo a duas equações é o modelo RNG k - ε de Yakhot e Orzag (1986). Ao invés do modelo k - ε tradicional, no modelo RNG k - ε os coeficientes não são determinados empiricamente e sim pela teoria dos Grupos de Renormalização.

No modelo RNG k - ε a viscosidade turbulenta é calculada pela seguinte expressão :

$$\nu_t = 2 \sqrt{\frac{c_\mu}{\nu}} \frac{k}{\sqrt{\varepsilon}} + c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.50)$$

e a energia cinética k e a dissipação ε são obtidas das seguintes equações de transporte:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \gamma v_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + v_t S^2 - \varepsilon \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \gamma v_t) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_t S^2 - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} - R \quad (3.52)$$

Nas equações acima, os coeficientes $c_\mu = 0,0845$; $c_{\varepsilon 1} = 1,42$; $c_{\varepsilon 2} = 1,68$ são deduzidos teoricamente. O termo γ representa o inverso do número de Prandtl para o transporte turbulento e é determinado pela seguinte equação:

$$\left| \frac{\gamma - 1,3929}{\gamma_0 - 1,3929} \right|^{0,6321} \left| \frac{\gamma + 2,3929}{\gamma_0 + 2,3929} \right|^{0,3679} = \frac{v}{v_e} \quad (3.53)$$

com $\gamma_0 = 1,0$.

Um termo muito importante do modelo é o termo R , relacionado à taxa de deformação do escoamento, e dado por:

$$R = \frac{C_\mu \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \varepsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \quad (3.54)$$

onde $\eta = S k / \varepsilon$; $\eta_0 \cong 4,38$ e $S^2 = 2 S_{ij} S_{ij}$. O termo S_{ij} representa o tensor taxa de deformação:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.55)$$

Em regiões de pequenas deformações do escoamento, o termo R tende a aumentar a viscosidade efetiva, v_e , mas mesmo nessas situações o valor de v_e ainda é menor do que o valor que seria avaliado pelo modelo k - ε tradicional. Em regiões de grande deformação o sinal de R torna-se negativo e v_e é reduzido consideravelmente. Esta característica do modelo RNG k - ε é responsável pelas melhorias verificadas na previsão de escoamentos com regiões de separação.

De acordo com Orzag *et al.* (1993), os maiores benefícios em se adotar o modelo RNG k - ε na modelação da turbulência, ao invés de modelos tradicionais como os apresentados nas seções 3.3.3 e 3.3.4, são os seguintes:

- a) Uma melhor precisão na solução de escoamentos com separação e curvatura das linhas de corrente;
- b) Possibilidade de emprego mesmo em regiões com baixos números de Reynolds, R_t , sem a necessidade de ajustes;
- c) Estabilidade numérica e boa taxa de convergência, necessitando somente um esforço computacional adicional quando comparado a outras versões de modelo $k-\varepsilon$.

3.3.6 Modelo $k-\omega$ de Wilcox (1994)

Kolmogorov (1942) propôs uma equação da vorticidade ω do movimento turbulento para ser resolvida junto com a equação de k , para avaliação de ν_t . De forma independente, Saffman (1970) formulou também um modelo $k-\omega$, que se mostrou ser mais eficiente que o modelo proposto por Kolmogorov (1942). Ao longo do tempo, vários pesquisadores (Wilcox e Alber 1972; Saffman e Wilcox, 1974; Wilcox e Traci, 1976; Wilcox e Rubesin, 1980; Wilcox, 1988) direcionaram seus esforços no sentido de melhorar o modelo $k-\omega$, aumentando a sua faixa de aplicação.

Observando processos físicos comuns de escoamentos turbulentos e combinando as razões físicas com a análise dimensional, Kolmogorov (1942) postulou a seguinte equação para ω :

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = -\beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma \mu_t \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \quad (3.56)$$

A equação (3.56) tem três particularidades. A primeira é a ausência do termo de produção. Isto é consistente com o modelo $k-\omega$, onde ω é associado com as menores escalas da turbulência e, conseqüentemente, não há interação direta com o escoamento médio. Apesar disto, deve ser notado que ω é avaliada usando informações das maiores escalas. A segunda particularidade é que a equação é escrita para ω e não para ω^2 como feito por vários autores. Finalmente, o terceiro aspecto é a ausência do termo de difusão molecular, o que faz com que o modelo seja adequado só em situações de números de Reynolds elevados.

Ao longo dos anos, a forma do modelo $k-\omega$ foi sendo modificada e todos os modelos passaram a incluir um termo de produção. De forma análoga a Kolmogorov (1942), Wilcox (1988), Speziale et al. (1990) e Wilcox (1994) escreveram uma equação de transporte também para ω . No modelo $k-\omega$ de Wilcox para números de Reynolds reduzidos (1994), as equações de transporte de k e ω são escritas na forma,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - c_k f_k \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = c_{\omega 1} f_{\omega} \frac{\omega}{k} P_k - c_{\omega 2} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_{\omega}} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (3.58)$$

onde P_k é a produção da energia cinética turbulenta dada pela equação (3.26).

A viscosidade turbulenta é dada por

$$\mu_t = c_{\mu} f_{\mu} \rho \frac{k}{\omega} \quad (3.59)$$

onde ω é definido como

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.60)$$

Os valores das constantes aparecendo no modelo são: $c_{\mu} = 1,0$, $c_k = 0,09$, $c_{\omega 1} = 0,56$, $c_{\omega 2} = 0,075$, $\sigma_k = \sigma_{\omega} = 2,0$. Por outro lado, as funções de amortecimento são dadas pelas relações:

$$f_{\mu} = (0,025 + R_t / 6,0) / (1,0 + R_t / 6,0) \quad (3.61)$$

$$f_k = [0,278 + (R_t / 8,0)^4] / [1,0 + (R_t / 8,0)^4] \quad (3.62)$$

$$f_{\omega} = (0,1 + R_t / 2,7) / [(1,0 + R_t / 2,7) f_{\mu}]^{-1} \quad (3.63)$$

O modelo pode ser aplicado em regiões próximas de superfícies sólidas e fornece, segundo Wilcox, resultados particularmente satisfatórios no caso de escoamentos sob gradientes adversos de pressão.

3.4 Condições de Contorno

Devido à natureza elíptica das equações de transporte apresentadas nas seções anteriores, condições de contorno para todas as variáveis dependentes devem ser especificadas em todos os contornos. Nos problemas analisados no presente trabalho existem quatro tipos diferentes de regiões para as quais devem ser prescritas condições de contorno:

a) Região de entrada

Usualmente, perfis de velocidade e de quantidades turbulentas são obtidos de dados experimentais, mas no presente trabalho estas informações não estão disponíveis. No entanto, Deschamps et al. (1996) procederam testes para verificar a sensibilidade da solução numérica em relação ao perfil de velocidade na entrada do difusor e concluíram que ela é insignificante. A razão disto, explicada em detalhes por aqueles autores, está relacionada à aceleração intensa que o escoamento sofre à medida que se aproxima da entrada do difusor, distorcendo o campo de velocidade. Sendo assim, optou-se neste trabalho por adotar o perfil de velocidade uniforme para as simulações. Na solução do escoamento periódico, foi prescrito um perfil senoidal de velocidade na entrada da válvula, segundo a equação

$$U_{in}(t) = \bar{U}_{in} [1,0 + A \sin(\omega t)], \quad (3.64)$$

onde \bar{U}_{in} é a velocidade média na entrada da válvula, A é a amplitude e $\omega (=2\pi f)$ é a frequência angular.

A energia cinética da turbulência foi especificada assumindo uma intensidade da turbulência, $I (= [2/3 k]^{1/2} / \bar{U}_{in})$, na entrada do orifício de passagem igual a 3%, seguindo também a sugestão de Deschamps et al. (1996).

A condição para a dissipação foi estimada a partir da hipótese de equilíbrio para a camada limite, $\varepsilon = c_\mu^{3/4} k^{3/2} / \ell_m$, onde $c_\mu = 0,09$. O comprimento de mistura ℓ_m é calculado usando a relação empírica para escoamentos em tubos, $\ell_m = 0,07 d/2$, onde d é o diâmetro do orifício de passagem.

b) Região de saída

Na saída do escoamento dois procedimentos distintos foram adotados. Para a relação de diâmetros $D/d = 3,0$, o comprimento do difusor foi suficiente para que a condição de escoamento parabólico pudesse ser assumida na saída (ver, por exemplo, Deschamps *et al.*, 1996). Assim, $\partial U/\partial r = \partial(rV)/\partial r = \partial k/\partial r = \partial \epsilon/\partial r = 0$. No caso da relação de diâmetros $D/d = 1,66$, o domínio de cálculo teve de ser estendido de tal forma que a condição de escoamento parabólico pudesse ser adotada.

c) Eixos e planos de simetria

Gradientes de qualquer propriedade escalar e componentes de velocidade na direção normal ao eixo (ou plano) de simetria foram considerados nulos.

d) Paredes sólidas

Para a velocidade foi assumida a condição de não deslizamento, isto é $U = V = W = 0$. Esta condição implica que a energia cinética turbulenta, k , também é nula nas paredes. Para o caso da dissipação, ϵ , procedimentos distintos tiveram de ser adotados. Para o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974), a opção de se resolver a equação para $\tilde{\epsilon}$, e não ϵ , permite que se use na parede $\tilde{\epsilon} = 0$. Por outro lado, para o modelo RNG $k-\epsilon$ a dissipação ϵ no volume adjacente à parede foi calculada usando um procedimento de duas camadas, seguindo uma condição de não equilíbrio, isto é,

$$k = \begin{cases} \left(\frac{y}{y_v}\right)^2 k_p & y < y_v \\ k_p & y > y_v \end{cases} \quad \epsilon = \begin{cases} \frac{2\nu k}{y^2} & y < y_v \\ \frac{k^{3/2}}{C_\ell y} & y > y_v \end{cases}, \quad (3.65)$$

onde $C_\ell = \kappa c_\mu^{-3/4}$, y é a distância adimensional do ponto central do volume até a parede, y_v é a espessura da sub-camada limite viscosa, k_p é a energia cinética turbulenta no volume e κ é a constante de von Karman ($\kappa = 0,42$).

Finalmente, o valor de ω no modelo $k-\omega$ é prescrito no volume adjacente à parede de acordo com a seguinte relação:

$$\omega = 6\nu/(c_{\omega 2} y^2), \quad (3.66)$$

onde $c_{\omega 2} = 0,075$ e y é a distância do centro do volume à parede.

3.5 Considerações Finais

Para a modelação do escoamento em difusores radiais, foi descartado o uso do modelo de comprimento de mistura e do modelo a uma equação devido à pouca precisão dos mesmos na modelação de escoamentos complexos e, também, pela difícil determinação do comprimento de mistura e da escala de comprimento adequadas para a modelação.

Em função da pouca precisão do modelo $k-\epsilon$ para números de Reynolds elevados na previsão do escoamento em difusores radiais, verificada por Deschamps *et al.* (1988) e Deschamps *et al.* (1989), decidiu-se não adotá-lo.

Na presente investigação foram testados o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974), o modelo RNG $k-\epsilon$ de Yakhot e Orzag (1986) e o modelo $k-\omega$ de Wilcox (1994), de forma a definir o modelo mais adequado para a previsão do escoamento turbulento em difusores radiais. Embora Deschamps *et al.* (1989) tenham verificado que o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974) não consiga reproduzir os picos negativos de pressão observados experimentalmente sobre a superfície do disco frontal, decidiu-se adotá-lo novamente aqui com o objetivo de testá-lo de forma mais extensiva. Além disto, a sua implementação pode ser considerada um passo intermediário da implementação dos modelos RNG $k-\epsilon$ e $k-\omega$.

O modelo RNG $k-\epsilon$ de Yakhot e Orzag (1986) foi aplicado com sucesso por Deschamps *et al.* (1996) na modelação do escoamento turbulento estacionário em difusores radiais com discos paralelos. Desta forma, é natural a sua escolha para a análise do escoamento turbulento do presente trabalho.

Wilcox (1994) tem argumentado que o modelo $k-\omega$ é particularmente adequado para problemas sob gradientes adversos de pressão. Como esta é precisamente uma característica do escoamento em difusores radiais, decidiu-se examinar este modelo também.

METODOLOGIA NUMÉRICA

4.1 Introdução

O presente capítulo fornece detalhes da metodologia dos volumes finitos utilizada para a obtenção da solução numérica das equações governantes do escoamento. Em função do escopo principal da tese ser a modelação do escoamento turbulento, somente são fornecidas aquelas informações essenciais para a compreensão do procedimento de cálculo. Maiores detalhes do método podem ser facilmente encontrados numa série de excelentes referências, tais como Patankar (1980), Maliska (1995), Versteeg e Malalasekera (1995) e Ferziger e Peric (1996).

Inicialmente, na seção 4.2, a discretização das equações de conservação é apresentada para uma propriedade genérica ϕ , com especial atenção ao tratamento dos termos de transporte advectivo e difusivo. O arranjo colocalizado de variáveis adotado para a integração das equações e o procedimento necessário para o acoplamento dos campos de pressão e de velocidade são discutidos na seção 4.3. Um detalhe importante na modelação numérica de escoamentos turbulentos é o tratamento dado à integração dos termos fontes das equações; isto é indicado na seção 4.4. As condições de contorno necessárias para a solução dos escoamentos, discutidas no capítulo 3, são abordadas, do ponto de vista de implementação, na seção 4.5. Finalmente, o procedimento iterativo para a solução do sistema de equações algébricas resultante da discretização das equações de transporte é apresentado na seção 4.6.

4.2 Discretização da Equações de Conservação

A idéia básica do *Método dos Volumes Finitos* adotado neste trabalho consiste em dividir o domínio de solução em pequenos volumes e integrar então as equações de conservação em cada um deles. Desta integração resulta um sistema de equações algébricas que, quando resolvido, fornece os campos das propriedades que representam a solução do escoamento.

Por exemplo, para uma propriedade genérica ϕ a equação de transporte para um sistema de coordenadas cartesianas é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V\phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho W\phi) = \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) + S \end{aligned} \quad (4.1)$$

As equações do movimento nas três direções do sistema de coordenadas são obtidas fazendo-se ϕ igual a U , V e W . O termo Γ representa um coeficiente de difusão relativo à propriedade transportada em questão (por exemplo, para as equações de Reynolds $\Gamma = \mu_e$, onde μ_e é a viscosidade efetiva).

A discretização das equações de conservação pelo método dos volumes finitos é apresentada a seguir para a variável ϕ e pode representar, portanto, as componentes de velocidade U , V e W , como também as grandezas turbulentas k e ϵ . Para a integração da equação de conservação adota-se um volume de controle típico como mostrado na Figura 4.1.

Usando o conceito de média de Reynolds, a equação de conservação para uma variável média adimensional genérica Φ , em coordenadas cilíndricas e regime permanente pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (W\Phi) + \frac{\partial}{\partial R} (RV\Phi) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (RU\Phi) \right] = \\ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(R\mu_e \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R\mu_e}{\delta} \frac{\partial\Phi}{\partial \eta} \right) \right] + B \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde B é o termo fonte correspondente da equação de transporte. Deve ser observado que a equação acima já possui a devida transformação de coordenadas para o tratamento da inclinação da palheta (ou disco frontal). Aqui, como em Possamai *et al.* (1995), adotou-se a transformação de coordenadas sugerida por Faghri *et al.* (1984). Na seção 5.2.3 esta transformação de coordenadas será apresentada em detalhes.

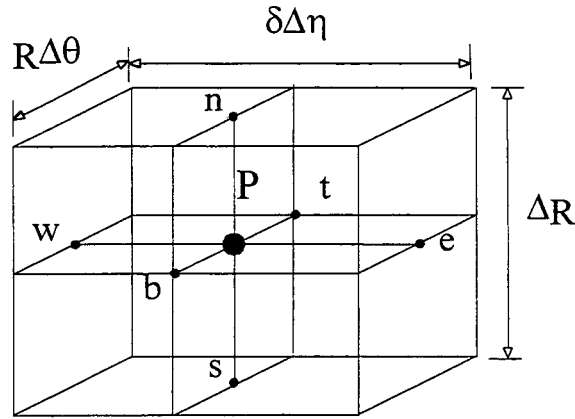


Figura 4.1: Volume de controle usado para a discretização das equações de conservação.

Integrando a equação (4.2) no volume indicado na Figura 4.1, obtém-se a seguinte equação discretizada:

$$\frac{1}{R} \left[\frac{(W\Phi)_t - (W\Phi)_b}{\Delta\theta} + \frac{(RV\Phi)_n - (RV\Phi)_s}{\Delta R} + \frac{(RU\Phi)_e - (RU\Phi)_w}{\delta\Delta\eta} \right] =$$

$$\frac{1}{R} \left[\frac{\left(\frac{\mu_e}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)_t - \left(\frac{\mu_e}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right)_b}{\Delta\theta} + \frac{\left(R\mu_e \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right)_n - \left(R\mu_e \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right)_s}{\Delta R} + \frac{\left(\frac{R\mu_e}{\delta} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_e - \left(\frac{R\mu_e}{\delta} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right)_w}{\delta\Delta\eta} \right] + \bar{B} \quad (4.3)$$

onde \bar{B} indica uma média do termo fonte no volume de controle. Multiplicando a equação (4.3) pelo volume da célula, $\Delta V = R \Delta\theta \Delta R \delta \Delta\eta$, vem que

$$\begin{aligned}
&[(W\Phi)_t - (W\Phi)_b] \Delta R \delta \Delta \eta + [(RV\Phi)_n - (RV\Phi)_s] \Delta \theta \delta \Delta \eta + [(RU\Phi)_e - (RU\Phi)_w] \Delta \theta \Delta R = \\
&\left[\left(\frac{\mu_e}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_t - \left(\frac{\mu_e}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_b \right] \Delta R \delta \Delta \eta + \left[\left(R \mu_e \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_n - \left(R \mu_e \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_s \right] \Delta \theta \delta \Delta \eta + \\
&\left[\left(\frac{R \mu_e}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_e - \left(\frac{R \mu_e}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_w \right] \Delta \theta \Delta R + \bar{B} \Delta V
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Na equação (4.4) as áreas de fluxo A_I nas direções I (onde $I = \theta, R$ ou X) são dadas por:

$$A_\theta = \Delta R \delta \Delta \eta \quad ; \quad A_R = R \Delta \theta \delta \Delta \eta \quad ; \quad A_X = R \Delta \theta \Delta R \quad (4.5)$$

Substituindo as expressões (4.5) na equação (4.4) vem que

$$\begin{aligned}
&[(WA_\theta\Phi)_t - (WA_\theta\Phi)_b] + [(VA_R\Phi)_n - (VA_R\Phi)_s] + [(UA_X\Phi)_e - (UA_X\Phi)_w] = \\
&\left[\left(\frac{\mu_e A_\theta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_t - \left(\frac{\mu_e A_\theta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right)_b \right] + \left[\left(\mu_e A_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_n - \left(\mu_e A_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right)_s \right] + \\
&+ \left[\left(\frac{\mu_e A_X}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_e - \left(\frac{\mu_e A_X}{\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right)_w \right] + \bar{B} \Delta V
\end{aligned} \quad (4.6)$$

Discretizando os termos difusivos através de diferenças centrais e ordenando, tem-se

$$\begin{aligned}
&(WA_\theta)_t \Phi_t - (WA_\theta)_b \Phi_b + (VA_R)_n \Phi_n - (VA_R)_s \Phi_s + (UA_X)_e \Phi_e - (UA_X)_w \Phi_w = \\
&\left(\frac{\mu_e A_\theta}{R \Delta \theta} \right)_t (\Phi_T - \Phi_P) - \left(\frac{\mu_e A_\theta}{R \Delta \theta} \right)_b (\Phi_P - \Phi_B) + \left(\frac{\mu_e A_R}{\Delta R} \right)_n (\Phi_N - \Phi_P) + \\
&- \left(\frac{\mu_e A_R}{\Delta R} \right)_s (\Phi_P - \Phi_S) + \left(\frac{\mu_e A_X}{\delta \Delta \eta} \right)_e (\Phi_E - \Phi_P) - \left(\frac{\mu_e A_X}{\delta \Delta \eta} \right)_w (\Phi_P - \Phi_W) + \bar{B} \Delta V
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Denotando

$$\begin{aligned}
 F_t &= (WA_\theta)_t \quad ; \quad D_t = \left(\frac{\mu_e A_\theta}{R \Delta \theta} \right)_e & F_s &= (VA_R)_s \quad ; \quad D_s = \left(\frac{\mu_e A_R}{\Delta R} \right)_s \\
 F_b &= (WA_\theta)_b \quad ; \quad D_b = \left(\frac{\mu_e A_\theta}{R \Delta \theta} \right)_b & F_e &= (UA_X)_e \quad ; \quad D_e = \left(\frac{\mu_e A_X}{\delta \Delta \eta} \right)_e \\
 F_n &= (VA_R)_n \quad ; \quad D_n = \left(\frac{\mu_e A_R}{\Delta R} \right)_n & F_w &= (UA_X)_w \quad ; \quad D_w = \left(\frac{\mu_e A_X}{\delta \Delta \eta} \right)_w
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

e substituindo estas expressões na equação (4.7), obtém-se

$$\begin{aligned}
 F_t \Phi_t - F_b \Phi_b + F_n \Phi_n - F_s \Phi_s + F_e \Phi_e - F_w \Phi_w &= D_t (\Phi_T - \Phi_P) - D_b (\Phi_P - \Phi_B) + \\
 + D_n (\Phi_N - \Phi_P) - D_s (\Phi_P - \Phi_S) + D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W) &+ \bar{B} \Delta V
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Finalmente, utilizando algum esquema de interpolação para avaliar as propriedades Φ nas faces do volume (t, b, n, s, e, w), chega-se à equação discretizada para a variável genérica Φ a ser resolvida em cada um dos volumes:

$$a_p \Phi_P = a_t \Phi_T + a_b \Phi_B + a_n \Phi_N + a_s \Phi_S + a_e \Phi_E + a_w \Phi_W + S_\Phi \tag{4.10}$$

ou

$$a_p \Phi_P = \sum a_{nb} \Phi_{NB} + S_\Phi \tag{4.11}$$

Para a avaliação do transporte advectivo nas faces de cada volume foram utilizados os esquemas de interpolação QUICK (“Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics”) de Leonard (1979) para as componentes de velocidade e PLDS (“Power Law Differencing Scheme”) de Patankar (1980) para as grandezas turbulentas.

A escolha do esquema PLDS para as grandezas turbulentas k e ε foi realizada, essencialmente, para garantir a estabilidade numérica na solução de suas equações de transporte (ver Deschamps et al., 1996). Devido ao fato do esquema PLDS ser um esquema menos preciso, foi necessário um estudo de refino de malha cuidadoso para reduzir os erros de truncamento a um

mínimo. Utilizando-se o esquema PLDS chega-se aos seguintes coeficientes para a equação (4.10):

$$\begin{aligned} a_e &= (DA)_e (|P_e|) + \max(-F_e, 0) & a_w &= (DA)_w (|P_w|) + \max(F_w, 0) \\ a_n &= (DA)_n (|P_n|) + \max(-F_n, 0) & a_s &= (DA)_s (|P_s|) + \max(F_s, 0) \\ a_t &= (DA)_t (|P_t|) + \max(-F_t, 0) & a_b &= (DA)_b (|P_b|) + \max(F_b, 0) \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$a_p = \sum a_{nb} - Sp\Delta V$$

$$B^\phi = Sc\Delta V$$

onde P_i (com $i = e, w, t, b, n, s$) representa o número de Peclet nas faces do volume em questão.

A determinação dos coeficientes da equação (4.10) através do esquema de interpolação QUICK adota o procedimento sugerido por Hayase (1992). Para este esquema, a avaliação das propriedades nas faces depende do sentido do fluxo através delas. Assim, escreve-se

$$F_i \Phi_i = F_i^+ \Phi_i^+ + F_i^- \Phi_i^- \quad (4.13)$$

onde,

$$F_i^+ = \begin{cases} U_i A_i & , \quad U_i > 0 \\ 0 & , \quad U_i < 0 \end{cases} \quad e \quad F_i^- = \begin{cases} 0 & , \quad U_i > 0 \\ U_i A_i & , \quad U_i < 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Substituindo a equação (4.13) na equação (4.9) tem-se:

$$\begin{aligned} &F_e^+ \Phi_e^+ + F_e^- \Phi_e^- - F_w^+ \Phi_w^+ - F_w^- \Phi_w^- + F_n^+ \Phi_n^+ + F_n^- \Phi_n^- - F_s^+ \Phi_s^+ - F_s^- \Phi_s^- + \\ &+ F_t^+ \Phi_t^+ + F_t^- \Phi_t^- - F_b^+ \Phi_b^+ - F_b^- \Phi_b^- = D_e (\Phi_E - \Phi_P) - D_w (\Phi_P - \Phi_W) + \\ &+ D_n (\Phi_N - \Phi_P) - D_s (\Phi_P - \Phi_S) + D_t (\Phi_T - \Phi_P) - D_b (\Phi_P - \Phi_B) + \bar{B}\Delta V \end{aligned} \quad (4.15)$$

Na proposição de Hayase (1992) as propriedades nas faces são avaliadas como sendo igual ao valor da propriedade no ponto nodal à montante do fluxo na face, mais um termo fonte obtido através do ajuste de uma função quadrática envolvendo os valores da propriedade em três pontos nodais. Assim, da equação (4.15) tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi_e^+ &= \Phi_P + S_e^+ & \Phi_n^+ &= \Phi_P + S_n^+ & \Phi_t^+ &= \Phi_P + S_t^+ \\
\Phi_e^- &= \Phi_E + S_e^- & \Phi_n^- &= \Phi_N + S_n^- & \Phi_t^- &= \Phi_T + S_t^- \\
\Phi_w^+ &= \Phi_W + S_w^+ & \Phi_s^+ &= \Phi_S + S_s^+ & \Phi_b^+ &= \Phi_B + S_b^+ \\
\Phi_w^- &= \Phi_P + S_w^- & \Phi_s^- &= \Phi_P + S_s^- & \Phi_b^- &= \Phi_P + S_b^-
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Substituindo as expressões acima na equação (4.15), resulta:

$$\begin{aligned}
& F_e^+(\Phi_P + S_e^+) + F_e^-(\Phi_E + S_e^-) - F_w^+(\Phi_W + S_w^+) - F_w^-(\Phi_P + S_w^-) + F_n^+(\Phi_P + S_n^+) + \\
& + F_n^-(\Phi_N + S_n^-) - F_s^+(\Phi_S + S_s^+) - F_s^-(\Phi_P + S_s^-) + F_t^+(\Phi_P + S_t^+) + F_t^-(\Phi_T + S_t^-) + \\
& - F_b^+(\Phi_B + S_b^+) - F_b^-(\Phi_P + S_b^-) = D_e(\Phi_E - \Phi_P) - D_w(\Phi_P - \Phi_W) + D_n(\Phi_N - \Phi_P) + \\
& - D_s(\Phi_P - \Phi_S) + D_t(\Phi_T - \Phi_P) - D_b(\Phi_P - \Phi_B) + \bar{B}\Delta V
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Expandindo e agrupando a equação anterior, vem que

$$\begin{aligned}
& (F_e^+ - F_w^+ + F_n^+ - F_s^+ + F_t^+ - F_b^+ + D_e + D_w + D_n + D_s + D_t + D_b)\Phi_P = \\
& (-F_e^- + D_e)\Phi_E + (F_w^+ + D_w)\Phi_W + (-F_n^- + D_n)\Phi_N + (F_s^+ + D_s)\Phi_S + \\
& (-F_t^- + D_t)\Phi_T + (F_b^+ + D_b)\Phi_B - F_e^+S_e^+ - F_e^-S_e^- + F_w^+S_w^+ + F_w^-S_w^- + \\
& - F_n^+S_n^+ - F_n^-S_n^- + F_s^+S_s^+ + F_s^-S_s^- - F_t^+S_t^+ - F_t^-S_t^- + F_b^+S_b^+ + F_b^-S_b^- + \bar{B}\Delta V
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Somando e subtraindo por conveniência alguns termos no lado esquerdo da equação anterior, tem-se então:

$$\begin{aligned}
& (F_e^+ - F_e^- + F_e^- - F_w^+ + F_w^+ - F_w^- + F_n^+ - F_n^- + F_n^- - F_s^+ + F_s^+ - F_s^- + \\
& + F_t^+ - F_t^- + F_t^- - F_b^+ + F_b^+ - F_b^- + D_e + D_w + D_n + D_s + D_t + D_b)\Phi_P = \\
& (-F_e^- + D_e)\Phi_E + (F_w^+ + D_w)\Phi_W + (-F_n^- + D_n)\Phi_N + (F_s^+ + D_s)\Phi_S + \\
& (-F_t^- + D_t)\Phi_T + (F_b^+ + D_b)\Phi_B - F_e^+S_e^+ - F_e^-S_e^- + F_w^+S_w^+ + F_w^-S_w^- + \\
& - F_n^+S_n^+ - F_n^-S_n^- + F_s^+S_s^+ + F_s^-S_s^- - F_t^+S_t^+ - F_t^-S_t^- + F_b^+S_b^+ + F_b^-S_b^- + \bar{B}\Delta V
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente agrupando os termos e lembrando que $F_i = F_i^+ + F_i^-$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & [(-F_e^- + D_e) + (F_w^+ + D_w) + (-F_n^- + D_n) + (F_s^+ + D_s) + (-F_t^- + D_t) + \\
 & + (F_b^+ + D_b) + (F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b)] \Phi_P = (-F_e^- + D_e) \Phi_E + \\
 & + (F_w^+ + D_w) \Phi_W + (-F_n^- + D_n) \Phi_N + (F_s^+ + D_s) \Phi_S + (-F_t^- + D_t) \Phi_T + \\
 & + (F_b^+ + D_b) \Phi_B - F_e^+ S_e^+ - F_e^- S_e^- + F_w^+ S_w^+ + F_w^- S_w^- - F_n^+ S_n^+ - F_n^- S_n^- + \\
 & + F_s^+ S_s^+ + F_s^- S_s^- - F_t^+ S_t^+ - F_t^- S_t^- + F_b^+ S_b^+ + F_b^- S_b^- + \bar{B} \Delta V
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pela equação da continuidade, o termo $(F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b)$ no lado esquerdo da equação (4.20) se anula. Desta forma, a equação discretizada para a variável Φ , equação (4.10), pode ser finalmente escrita com os seus coeficientes e termos fontes expressos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_e &= -F_e^- + D_e & a_n &= -F_n^- + D_n & a_t &= -F_t^- + D_t \\
 a_w &= F_w^+ + D_w & a_s &= F_s^+ + D_s & a_b &= F_b^+ + D_b
 \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_t + a_b \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned}
 S_q &= (-F_e^+ S_e^+ - F_e^- S_e^-) + (F_w^+ S_w^+ + F_w^- S_w^-) + (-F_n^+ S_n^+ - F_n^- S_n^-) + \\
 &+ (F_s^+ S_s^+ + F_s^- S_s^-) + (-F_t^+ S_t^+ - F_t^- S_t^-) + (F_b^+ S_b^+ + F_b^- S_b^-)
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

O termo fonte S_q é decorrente exclusivamente da interpolação pelo método QUICK e deve ser adicionado aos demais termos fonte da equação de transporte. A determinação dos termos fontes S_i^+ e S_i^- é mostrada no Apêndice III.

Quando o problema é em regime transiente, a equação discretizada tem a forma final,

$$a_p \Phi_P = \frac{M_P^0 \Phi_P^0}{\Delta t} + \sum a_{nb} \Phi_{NB} + S_\Phi \quad (4.24)$$

onde,

$$a_p = \sum a_{nb} - S_p \Delta V + \frac{M_P}{\Delta t} \quad (4.25)$$

Nas equações (4.24) e (4.25) o termo $M_p (= \rho \Delta V)$ representa a massa do volume e o superíndice “0” indica o valor da quantidade em questão no instante de tempo anterior. Na discretização do termo transiente da equação (4.1) adotou-se a formulação implícita pela possibilidade de se avançar o procedimento de cálculo com incrementos de tempo maiores.

4.3 Acoplamento entre os Campos de Pressão e de Velocidade

A localização relativa das variáveis na malha computacional é conhecida como arranjo de variáveis. Os dois procedimentos relevantes ao presente trabalho são conhecidos como arranjo desencontrado e arranjo colocalizado.

No arranjo desencontrado, a pressão é armazenada no centro do volume e as componentes de velocidade nas suas faces, de maneira que o gradiente de pressão, força motriz do campo de velocidade, possa ser calculado sem a necessidade de interpolações. Por outro lado, as componentes de velocidade para o balanço de massa no volume, necessário na correção do campo de pressão, são também armazenadas adequadamente nas faces e não necessitam de interpolação alguma. Embora o arranjo desencontrado seja considerado fisicamente consistente, o mesmo representa uma complexidade maior na implementação computacional, devido à complexidade do controle dos índices das diversas variáveis. Além disto, o arranjo desencontrado requer via de regra um esforço computacional maior devido ao uso de volumes diferentes para as diversas variáveis. As dificuldades indicadas acima são particularmente limitadoras quando o problema a ser resolvido é tridimensional.

O arranjo colocalizado de variáveis, mostrado na Figura 4.2 para uma situação bidimensional, torna mais fácil o controle dos índices e requer menor espaço de memória computacional, uma vez que todas as variáveis são armazenadas no centro de um mesmo volume. No entanto, segundo Patankar (1980), o arranjo colocalizado acarreta dois problemas que merecem destaque. O primeiro deles é a avaliação do gradiente de pressão para a equação de conservação da quantidade de movimento. Por exemplo, considerando a Figura 4.3, a derivada da pressão no ponto P é dada por,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_P \approx \frac{P_e - P_w}{\Delta x} \quad (4.26)$$

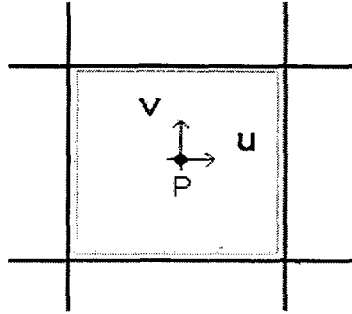


Figura 4.2: Arranjo colocalizado de variáveis

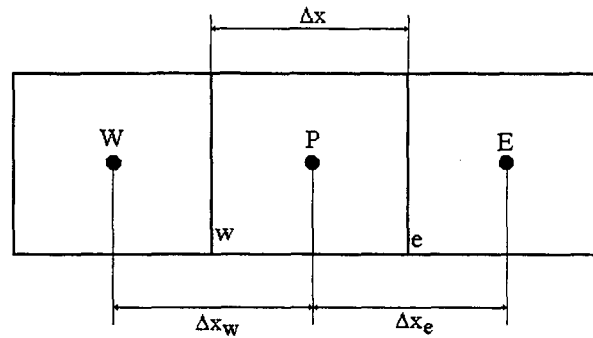


Figura 4.3: Determinação do gradiente de pressão no volume de controle

Fazendo uma aproximação linear para determinar as pressões nas faces, obtém-se,

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_P \approx \frac{P_E - P_W}{\Delta x_e + \Delta x_w} \quad (4.27)$$

Na equação (4.27) observa-se que a derivada da pressão no ponto P é avaliada a partir de dois volumes alternados. Isto significa que a estimativa da derivada é obtida, efetivamente, de

uma malha menos refinada, originando uma menor precisão no cálculo da componente de velocidade u . O mesmo ocorre para o cálculo das componentes de velocidade v e w .

O segundo problema ilustrado por Patankar (1980) é que a forma do cálculo do gradiente de pressão pode resultar totalmente inadequada no caso de campos oscilatórios de pressão.

Os argumentos levantados por Patankar (1980) em defesa do arranjo desencontrado contribuíram para que o mesmo fosse considerado por muitos como a única alternativa viável para garantir o acoplamento entre os campos de pressão e de velocidade. No entanto, a necessidade de se resolver geometrias mais complexas motivou o desenvolvimento de métodos de acoplamento pressão-velocidade para arranjos colocalizados que hoje estão bem difundidos na literatura especializada.

Pela simplicidade no controle dos índices, facilidade na implementação e menor demanda de memória computacional, optou-se neste trabalho pelo arranjo colocalizado das variáveis. Para a determinação do gradiente de pressão foi utilizada uma aproximação linear, que aumenta a precisão com o refino da malha computacional, e o problema do acoplamento pressão-velocidade foi tratado utilizando um método de acoplamento para arranjos colocalizados, discutido a seguir.

Para definir o método de acoplamento entre os campos de pressão e de velocidade a ser utilizado, foram implementados e testados os métodos SIMPLE e SIMPLEC. Os testes mostraram que o algoritmo SIMPLEC traz vantagens significativas no procedimento iterativo e, por esta razão, o mesmo foi empregado em todas as simulações restantes do trabalho.

No método SIMPLEC a equação de correção da velocidade na face “e” é dada por,

$$u_e = u_e^* - d_e^u (P'_E - P'_P) \quad (4.28)$$

onde P' é a correção da pressão nos diversos pontos nodais, e o asterisco * representa os valores da iteração anterior. O parâmetro d_e^u é dado por,

$$d_e^u = \left(\frac{\text{área}}{a_P - \sum a_{nb}} \right)_e \quad (4.29)$$

Substituindo as equações de correção da velocidade na equação da conservação da massa, chega-se à seguinte equação para a correção da pressão:

$$a_P P'_P = \sum a_{nb} P'_{NB} - \nabla \cdot \vec{V}^* \quad (4.30)$$

que permite corrigir os valores da pressão nos vários volumes de maneira a fornecer um campo de velocidade que satisfaça a equação da continuidade. Os coeficientes da equação (4.30) são da forma,

$$a_i = (\text{área} \times d_i)_i \quad (4.31)$$

onde o sub-índice i indica a face em questão.

Na aplicação do método SIMPLEC para o arranjo colocalizado surgem dois problemas. O primeiro deles é que, para o cálculo dos coeficientes da equação de correção da pressão, necessitam-se dos parâmetros d_i nas faces. Estes porém não estão disponíveis diretamente, uma vez que os coeficientes centrais a_P necessários nas faces para o seu cálculo, conforme equação (4.29), são somente avaliados no centro dos volumes. O problema é contornado fazendo-se uma interpolação dos valores de d_i para as faces a partir dos valores no centro dos volumes adjacentes. A outra dificuldade aparece na equação de correção da pressão, onde são necessárias as velocidades u^* nas faces para o cálculo de $\nabla \cdot \vec{V}^*$. Para contornar este problema, interpolam-se as equações de conservação da quantidade de movimento para cada uma das faces, a partir das equações escritas para os volumes adjacentes. Para ilustrar este procedimento, será calculada a velocidade u^* na face w do volume de controle ilustrado na Figura 4.3.

Sejam as equações discretizadas das equações de transporte da quantidade de movimento para os volumes centrados nos pontos W e P , respectivamente:

$$(a_P)_W u_W^* = \sum (a_{nb} u_{NB}^*)_W - \left(\frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_W \quad (4.32)$$

$$(a_P)_P u_P^* = \sum (a_{nb} u_{NB}^*)_P - \left(\frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_P \quad (4.33)$$

Dividindo as equações acima pelo termo a_P correspondente, tem-se

$$u_W^* = \frac{\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_W}{(a_P)_W} - \left(\frac{1}{a_P} \frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_W \quad (4.34)$$

$$u_P^* = \frac{\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_P}{(a_P)_P} - \left(\frac{1}{a_P} \frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_P \quad (4.35)$$

Com base na Figura 4.3, é realizada então uma interpolação linear da velocidade na face w utilizando as velocidades nos pontos W e P,

$$u_w^* = f_x u_W^* + (1 - f_x) u_P^* \quad (4.36)$$

onde f_x é o fator de interpolação utilizado dado por

$$f_x = \frac{x_2}{x_1 + x_2} \quad (4.37)$$

com

$$x_1 = \frac{\Delta x_W}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{\Delta x_P}{2} \quad (4.38)$$

Substituindo as equações (4.34) e (4.35) na equação (4.36), obtém-se uma equação para o cálculo da velocidade na face w,

$$u_w^* = f_x \frac{\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_W}{(a_P)_W} + (1 - f_x) \frac{\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_P}{(a_P)_P} + \left[f_x \left(\frac{1}{a_P} \frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_W + (1 - f_x) \left(\frac{1}{a_P} \frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_P \right] \quad (4.39)$$

O último termo da equação (4.39), que aparece entre colchetes, representa a interpolação linear do termo $[(1/a_p) (\Delta P/\Delta x) \Delta V]$ na face w. Assim, da equação (4.39), resulta uma equação para o cálculo da velocidade na face w através da interpolação das equações de transporte da quantidade de movimento dos volumes adjacentes,

$$u_w^* = f_x \frac{\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_w}{(a_p)_w} + (1 - f_x) \frac{\sum (a_{nb} u_{NB}^*)_p}{(a_p)_p} - \left(\frac{1}{a_p} \frac{\Delta P}{\Delta x} \Delta V \right)_w \quad (4.40)$$

A aproximação do último termo da equação (4.40) é realizado através das seguintes interpolações,

$$(a_p)_w = f_x (a_p)_w + (1 - f_x) (a_p)_p$$

$$\left(\frac{\Delta P}{\Delta x} \right)_w = \frac{P_p - P_w}{\Delta x_w} \quad (4.41)$$

$$\Delta V_w = \frac{\Delta V_w + \Delta V_p}{2}$$

Detalhes adicionais sobre o método SIMPLEC para o arranjo colocalizado de variáveis podem ser obtidos em Maliska (1995).

4.4 Tratamento dos Termos Fontes

A representação das equações de conservação na forma da equação (4.1) implica muitas vezes em se deslocar alguns termos da equação para o termo fonte S. Por exemplo, no caso da modelação do escoamento turbulento, usando o conceito de viscosidade turbulenta, surgem termos extras, os quais não estariam presentes caso o escoamento fosse laminar.

A primeira preocupação na forma de expressar o termo fonte é escrevê-lo o mais implicitamente possível. Desta forma, o termo fonte não será mantido constante ao longo do

passo iterativo. Um segundo aspecto, talvez até mais importante do que o primeiro, é garantir que a discretização do termo fonte não seja um obstáculo para a convergência do procedimento iterativo.

Uma forma de atender os dois requisitos acima é linearizar os termos fontes da seguinte forma:

$$S = S_p \cdot \phi_p + S_c \quad (4.42)$$

Como o termo S_p é um coeficiente de ϕ_p , ele é acomodado em a_p no lado esquerdo da equação discretizada (4.10). Portanto, S_p deve ser escrito de tal forma a ser negativo ou igual a zero, com o objetivo de evitar que o coeficiente a_p eventualmente se torne negativo; um valor negativo para a_p violaria uma das quatro regras básicas do método dos volumes finitos que recomenda que todos os coeficientes das equações discretizadas devem ser positivos. No caso de variáveis que são positivas por definição (por exemplo, k e ϵ), além da recomendação anterior, a linearização do termo fonte S deve ser realizada de forma que o termo S_c seja sempre positivo. De fato, em algumas regiões do escoamento os termos fontes são dominantes nas equações de conservação das grandezas turbulentas e um valor negativo para S_c pode acarretar valores negativos para k e ϵ . Maiores detalhes sobre o tratamento do termo fonte podem ser encontrados em Patankar (1980) e Maliska (1995).

4.5 Prescrição das Condições de Contorno

As condições de contorno adotadas para as simulações numéricas foram exploradas no Capítulo 3. Nesta seção trata-se unicamente dos detalhes da implementação computacional de cada uma delas.

Na região de entrada do escoamento o valor das variáveis é prescrito diretamente na fronteira de entrada e os transportes advectivo e difusivo calculados normalmente. Já no eixo de simetria não há transporte algum através da fronteira. Assim, os coeficientes da equação algébrica que avaliam a influência das propriedades no eixo de simetria sobre a propriedade no volume adjacente são definidos como nulos. No caso tridimensional, a implementação da condição de

contorno para o plano de simetria é similar à implementação da condição de contorno no eixo de simetria.

Nas paredes sólidas os valores de todas as variáveis são, via-de-regra, prescritos como nulos. A exceção ocorre para o valor de ε no modelo RNG k- ε de Orzag e Yakhot (1986) e para o valor de ω no modelo k- ω de Wilcox (1994). Nesses casos, os seus valores são prescritos nos volumes adjacentes às paredes, conforme expressões detalhadas na seção 3.4, fazendo

$$S_p = -10^{30} \quad \text{e} \quad S_c = 10^{30} \phi_p \quad (4.43)$$

onde ϕ_p é o valor de ε ou ω que deve ser fixado. Este artifício numérico torna os termos fontes dominantes na equação algébrica para o volume junto à parede, garantindo que ali $\phi = \phi_p$.

Na região de saída do difusor considerou-se a condição de escoamento parabólico, desprezando-se, portanto, a influência dos pontos nodais na fronteira sobre os campos de propriedades do escoamento. Para o caso do difusor com a menor relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem, $D/d = 1,66$, foi necessário também uma condição de pressão prescrita. Detalhes sobre a implementação da condição de contorno de pressão podem ser obtidos em Maliska (1995).

4.6 Solução das Equações Discretizadas

A solução do sistema de equações algébricas resultantes da discretização foi realizada usando o método TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm), amplamente descrito na literatura. Em função da organização estruturada dos volumes e com o objetivo de economia computacional, o código computacional desenvolvido no presente trabalho adota uma indexação de tal forma a evitar a solução das equações em regiões do domínio ocupadas por material sólido. Maiores detalhes deste procedimento são apresentados no capítulo 5.

Como as equações de conservação não são lineares, suas soluções requerem o uso de fatores de relaxação para evitar a divergência durante o processo iterativo de solução. A maneira de introduzir o fator de relaxação nas equações pode ser ilustrada a partir da equação na forma discretizada:

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + S_\phi \quad (4.44)$$

onde ϕ_P é uma propriedade arbitrária. Uma outra forma de escrever a equação (4.44) é

$$\phi_P = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} \quad (4.45)$$

Definindo ϕ_P^* como o valor da propriedade ϕ_P na iteração anterior e somando e subtraindo o seu valor no lado direito da equação (4.45), tem-se

$$\phi_P = \phi_P^* + \left(\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^* \right) \quad (4.46)$$

O termo entre parênteses na equação (4.46) representa a variação da propriedade ϕ_P na iteração corrente. Tal variação pode ser modificada através da introdução de um fator de relaxação α :

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha \left(\frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} - \phi_P^* \right) \quad (4.47)$$

ou,

$$\frac{a_P}{\alpha} \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b + (1 - \alpha) \frac{a_P}{\alpha} \phi_P^* \quad (4.48)$$

Observa-se na equação (4.47) que valores de α entre 0 e 1 correspondem à sub-relaxação do procedimento iterativo e valores acima de 1 fornecem um efeito de sobre-relaxação. A escolha dos fatores de relaxação não é uma tarefa trivial e depende da experiência do analista numérico, uma vez que depende do problema em mãos. Os valores típicos dos fatores de relaxação adotados nas simulações do presente trabalho foram $\alpha = 0,4$ para a equação da quantidade de movimento, $\alpha = 0,2$ para as equações da energia cinética turbulenta e de sua dissipação e $\alpha = 0,7$ para a equação da correção da pressão.

Para a solução dos sistemas de equações foi adotado um critério de convergência de maneira a finalizar o processo iterativo de cálculo, e considerar a solução convergida. O critério foi baseado na soma dos resíduos, obtidos do balanço das equações das propriedades, ao longo de todos os volumes. Considerando a equação (4.44), a soma dos resíduos para uma propriedade genérica ϕ nos “N” volumes da malha computacional é dada por:

$$r^\phi = \sum_N \left| \sum a_{nb} \phi_{NB} + S_c - a_P \phi_P \right| \quad (4.49)$$

onde o símbolo $| \quad |$ representa o valor absoluto do resíduo no volume em questão. Este resíduo r^ϕ é normalizado da seguinte forma

$$R^\phi = \frac{\sum_N \left| \sum a_{nb} \phi_{NB} + S_c - a_P \phi_P \right|}{\sum_N \left| a_P \phi_P \right|} \quad (4.50)$$

No caso das equações da conservação da quantidade de movimento, o termo $a_P \phi_P$ no denominador na equação acima é substituído por $a_P v_P$, onde v_P é a magnitude do vetor velocidade no volume.

Para o cálculo do resíduo da equação da conservação da massa adotou-se uma balanço simples dado por:

$$r^m = \sum_N \left| \sum (\rho V A)_i \right| \quad (4.51)$$

onde ρ , V e A representam a massa específica, a velocidade e a área na face do volume, respectivamente. O subíndice i representa as faces do volume de controle ($i = w, e, s, n, t, b$). O resíduo da equação da conservação da massa foi normalizado dividindo-o pelo resíduo obtido na segunda iteração.

O critério de convergência adotado foi de que a soma dos resíduos de todas as variáveis fosse menor do que 10^{-4} . Obviamente, para se ter segurança com relação a este critério, foi realizada uma série de testes para se certificar de que realmente o resultado numérico não variava quando mais iterações eram permitidas.

O procedimento de cálculo adotado para a solução das equações algébricas apresentadas neste capítulo pode ser sintetizado como a seguir:

1. Geração da malha computacional;
2. Atribuição de valores para as propriedades físicas, fatores de relaxação e critério de convergência;
3. Inicialização das variáveis;
4. Prescrição das condições de contorno;
5. Cálculo da viscosidade efetiva;
6. Cálculo dos coeficientes e dos termos fontes das equações algébricas para as componentes de velocidade e aplicação do método TDMA para a solução do sistema de equações;
7. Correção dos campos de velocidade e de pressão com o algoritmo SIMPLEC;
8. Cálculo dos coeficientes e dos termos fontes das equações algébricas para a energia cinética turbulenta, k , e aplicação do método TDMA para a solução do sistema de equações;
9. Cálculo dos coeficientes e dos termos fontes das equações algébricas para a dissipação da energia cinética turbulenta, ε , e aplicação do método TDMA para a solução do sistema de equações;
10. Verificação da convergência do procedimento. Caso não tenha sido alcançada, o procedimento é retornado ao passo 5 e repetidos os passos seguintes até a convergência. Caso tenha sido alcançada, o procedimento segue em frente.
11. No caso de regime transiente, um incremento de tempo é somado até que a condição de tempo máximo estabelecido para o processo seja verificada. Caso não tenha sido alcançada, o processo é repetido a partir do passo 4. Caso contrário, o procedimento segue em frente.
12. Gravação dos campos de velocidade, de pressão e de grandezas turbulentas para o pós-processamento e término do procedimento iterativo.

ESCOAMENTO TURBULENTO ATRAVÉS DE VÁLVULAS INCLINADAS

5.1 Introdução

O presente capítulo trata da solução numérica e da análise do escoamento turbulento através de válvulas inclinadas, considerando a geometria simplificada de difusor radial com o disco frontal inclinado. A formulação do problema e o tratamento das equações necessárias para a solução do escoamento são apresentados na seção 5.2. Tendo em vista que o código computacional bidimensional foi desenvolvido a partir de um outro código com metodologia computacional diferente, realizou-se uma verificação de sua correta implementação através da comparação de alguns de seus resultados, com dados disponíveis na literatura, entre outros. Esta análise é apresentada na seção 5.3. Validado o código computacional, procedeu-se a uma análise comparativa de três modelos de turbulência. O primeiro deles é o modelo $k-\epsilon$ proposto por Launder e Sharma (1974), cujo emprego em trabalhos anteriores (Deschamps et al., 1989) não reproduziu de forma satisfatória os dados experimentais de pressão sobre o disco frontal. Embora o problema tenha sido relacionado a deficiências conhecidas do modelo, neste trabalho é realizada uma análise mais profunda da questão. O segundo modelo adotado é uma variante do modelo $k-\epsilon$ e foi derivado por Orzag e Yakhot (1986) com base na teoria dos grupos renormalizados. Esta versão é comumente referenciada como modelo RNG $k-\epsilon$ e tem sido aplicado com sucesso na previsão de várias classes de escoamento onde o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974) não se mostra adequado. A literatura disponível sobre o modelo RNG $k-\epsilon$ é ainda um tanto escassa e um pouco conflitante com relação à forma precisa de suas equações. Por exemplo, a relação usada para o cálculo da viscosidade turbulenta μ_t difere daquela adotada em todas as versões de modelos de turbulência $k-\epsilon$. De fato, talvez seja por este motivo que alguns

autores têm preferido a expressão mais tradicional para a avaliação de μ_t . Neste trabalho decidiu-se investigar o impacto que essas diferentes relações para μ_t têm sobre o resultado da modelação. Por fim, como um terceiro modelo, adotou-se a formulação $k-\omega$ apresentada por Wilcox (1994).

A seção 5.4 mostra uma análise comparativa dos modelos de turbulência $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974), RNG $k-\epsilon$ de Orzag e Yakhot (1986) e $k-\omega$ de Wilcox (1994), identificando o modelo mais adequado para a simulação do escoamento através do difusor. Após esta etapa, uma outra atividade de importância crucial foi a análise da sensibilidade da solução numérica em relação a parâmetros usados no procedimento de cálculo, tais como refino de malha, condições de contorno, etc. Esta análise é apresentada na seção 5.5. A partir da escolha do modelo e da validação da solução numérica, o escoamento é então investigado para uma variedade de situações de parâmetros geométricos (inclinação do disco frontal, α , afastamento entre os discos, s/d , relação de diâmetros, D/d) e de números de Reynolds, Re , conforme resultados e discussões apresentadas na seção 5.6. Finalmente, a seção 5.7 sintetiza as principais conclusões dessas investigações bem como da modelação da turbulência em válvulas.

5.2 Formulação do Problema

Muitos sistemas de válvulas encontrados em compressores de refrigeração são do tipo palheta, onde uma das extremidades da palheta é engastada e a outra permanece livre, inclinándose durante seu funcionamento (Figura 5.1). A inclinação da palheta é limitada por um batente que evita deflexões excessivas e aumenta sua vida útil. Como um primeiro passo para a análise desta situação, Possamai (1994) considerou o escoamento laminar através da geometria simplificada de difusor radial com disco frontal inclinado conforme mostrado na Figura 5.2. Este trabalho é um passo natural para uma melhor modelagem do problema, passando-se a considerar para a mesma geometria o regime turbulento que prevalece praticamente em toda a abertura da válvula.

Pelo exame da geometria do escoamento percebe-se claramente a necessidade de uma análise tridimensional do problema. Por outro lado, a existência de um plano de simetria, passando pelos pontos de menor e maior afastamentos entre os discos, torna possível resolver somente a metade da geometria do escoamento, reduzindo consideravelmente o tempo computacional requerido para a solução numérica.

Um procedimento comumente adotado na solução do escoamento é o de tratar eventuais regiões sólidas no domínio de cálculo como se fosse ocupada por um fluido de viscosidade infinita. Embora seja atrativa em alguns casos, esta técnica representa um gasto computacional desnecessário que pode ser significativo em problemas tridimensionais. Por esta razão, aplicou-se aqui uma técnica de arranjo semi-estruturado para as variáveis, implementada anteriormente com sucesso por Langer et al. (1994), e que evita a inclusão da região sólida no domínio de solução. A Figura 5.3 mostra um esquema dos domínios de solução adotados para a análise de problemas bidimensional e tridimensional, respectivamente.

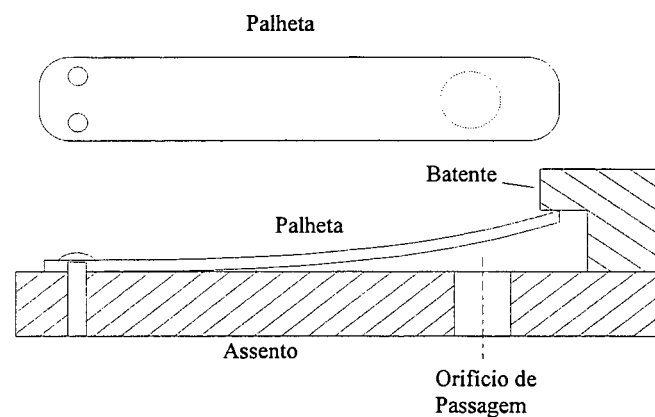


Figura 5.1: Válvula com palheta engastada utilizada em compressores alternativos

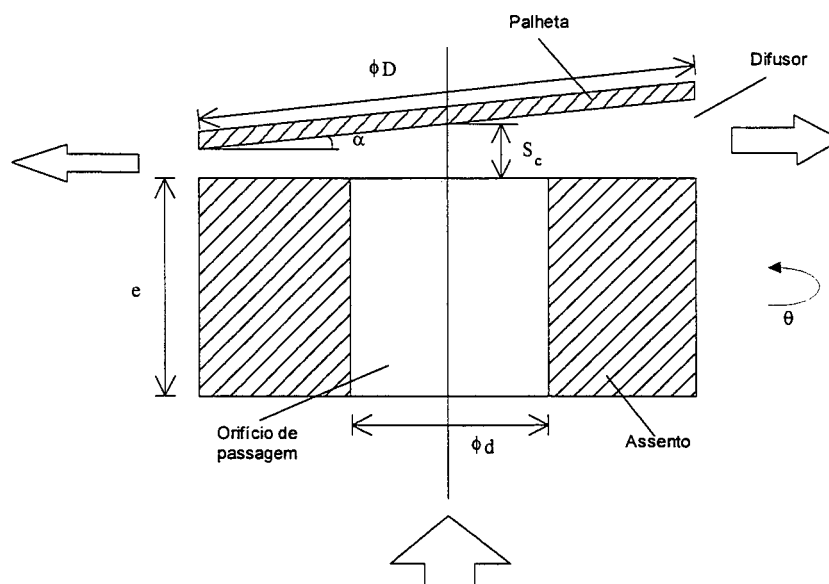
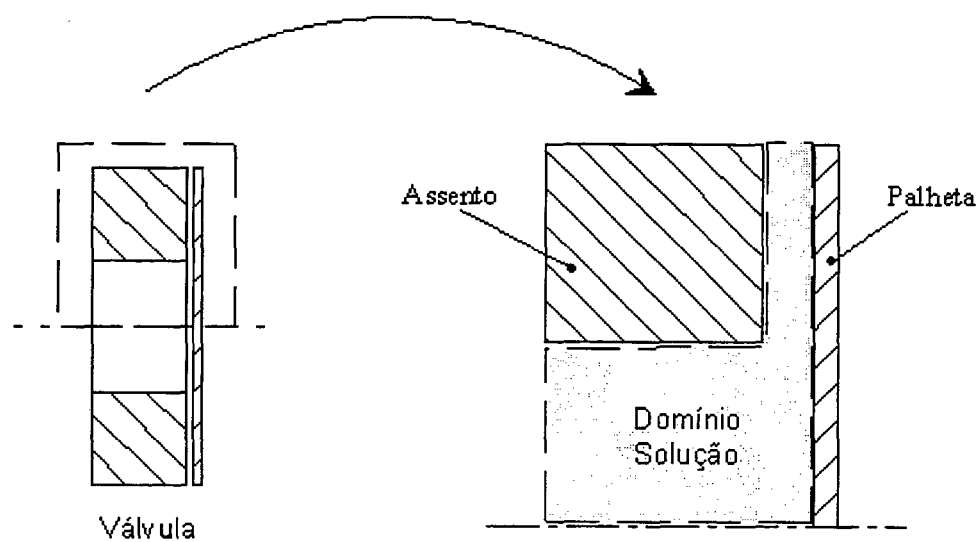
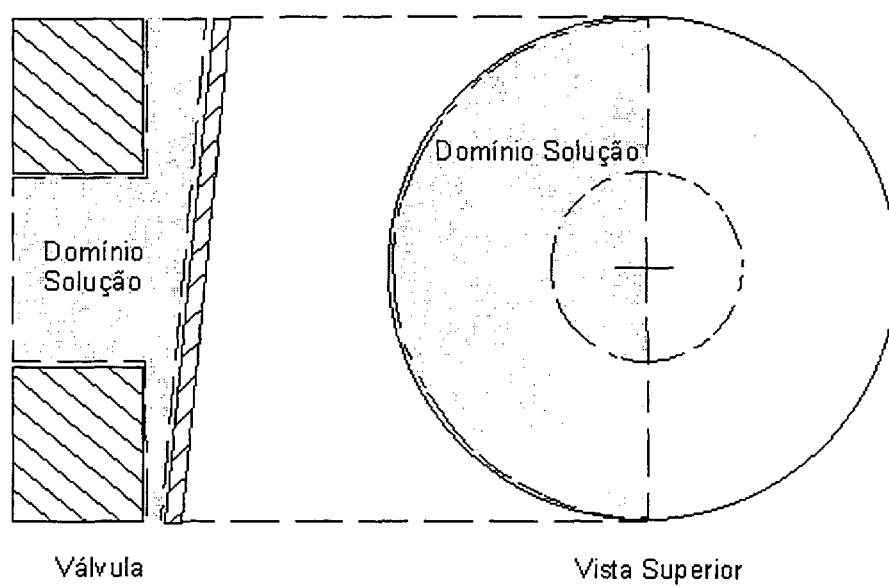


Figura 5.2: Geometria de válvula com palheta inclinada usada por Possamai (1994)



(a)



(b)

Figura 5.3: Domínio computacional: (a) bidimensional ; (b) tridimensional.

5.2.1 Equações Governantes

Na modelação do problema considerou-se o escoamento incompressível, isotérmico, permanente de um fluido newtoniano com propriedades físicas constantes e sem sofrer a ação significativa de forças de massa.

O sistema de coordenadas cilíndrico é o mais apropriado para a geometria em análise mas não se ajusta de forma adequada para a condição de disco frontal inclinado. Por esta razão, mais à frente apresenta-se uma transformação de coordenadas na direção axial para contornar este problema e permitir a incorporação da inclinação do disco frontal de forma conveniente.

Desprezando-se flutuações da massa específica ρ e da viscosidade molecular μ , as equações de conservação em coordenadas cilíndricas para o escoamento instantâneo são:

- Conservação da massa

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \tilde{u}) \right] = 0 \quad (5.1)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção axial
(componente de velocidade \tilde{u})

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u}) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \tilde{w} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \tilde{v} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \tilde{u} \tilde{u}) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.2)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção radial
(componente de velocidade \tilde{v})

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{v}) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \tilde{w} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \tilde{v} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \tilde{u} \tilde{v}) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \mu \frac{\tilde{v}}{r^2} + \rho \frac{\tilde{w}^2}{r} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \end{aligned} \quad (5.3)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento na direção circunferencial (componente de velocidade \tilde{w})

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\tilde{w}) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho\tilde{w}\tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r\tilde{v}\tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r\tilde{u}\tilde{w}) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \mu \frac{\tilde{w}}{r^2} - \rho \frac{\tilde{w}\tilde{v}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde o \sim indica propriedade instantânea.

5.2.2 Modelação da Turbulência

Embora a solução numérica de escoamentos tridimensionais transientes seja uma atividade comum nos dias de hoje, a solução direta das equações (5.1)-(5.4) para o escoamento turbulento em válvulas não é possível devido aos níveis elevados de discretização espacial e temporal que seriam necessários para resolver as menores escalas do movimento turbulento. Uma alternativa, apresentada em detalhes por Silveira Neto (1998), é a técnica da simulação de grandes escalas. Como o nome sugere, neste método somente as maiores escalas do movimento turbulento são resolvidas, enquanto que o efeito das menores escalas sobre o escoamento são quantificadas através de algum modelo simples baseado no conceito de viscosidade turbulenta. Desta forma, é possível se obter uma redução dramática do custo computacional pela diminuição dos requerimentos de discretização espacial e temporal. Mesmo assim, esta economia de recursos computacionais não é, até o momento, suficiente para que a simulação de grandes escalas possa ser aplicada na solução do escoamento em válvulas.

A alternativa adotada neste trabalho, e discutida em detalhes no capítulo 3, é introduzir o conceito de média de Reynolds. A idéia fundamental deste procedimento é realizar uma média estatística das equações de conservação, escrevendo cada uma das variáveis como sendo a soma de um valor médio, que se mantém constante no intervalo de tempo da média, e um valor de flutuação. Esta média, quando aplicada às equações de Navier-Stokes, fornecem termos associados ao movimento turbulento, comumente denominados tensões de Reynolds, e os quais necessitam ser quantificados através de um modelo de turbulência. Dentre as várias alternativas

discutidas no capítulo 3, decidiu-se pela adoção de modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta. A dedução das equações seguindo este conceito é apresentada no Apêndice IV e o resultado final é o sistema de equações escrito abaixo:

- Média da equação para a componente de velocidade \tilde{u}

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{WU}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \overline{VU}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \overline{U^2}) \right] = \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial \overline{U}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_e \frac{\partial \overline{U}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu_e \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right) \right] + S + S_t \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x} \\ S_t &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

- Média da equação para a componente de velocidade \tilde{v}

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{WV}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \overline{V^2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \overline{UV}) \right] = \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial \overline{V}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial \overline{V}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e r \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \right) \right] + S + S_t \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde,

$$\begin{aligned} S &= -2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \theta} - \mu \frac{\overline{V}}{r^2} + \rho \frac{\overline{W}^2}{r} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial r} \\ S_t &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial \overline{V}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\partial \overline{W}}{\partial r} \right) - 2 \mu_t \frac{\overline{V}}{r^2} + \\ &\quad - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\overline{W}}{r} \right) - 2 \frac{\mu_t}{r^2} \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

- Média da equação para a componente de velocidade \tilde{w}

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{W W}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \overline{V W}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \overline{U W}) \right] = \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial \overline{W}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e r \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \right) \right] + S + S_t \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde,

$$\begin{aligned} S = 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial \theta} - \mu \frac{\overline{W}}{r^2} - \rho \frac{\overline{W V}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{P}}{\partial \theta} \\ S_t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\mu_t}{r} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \theta} + 2 \mu_t \frac{\overline{V}}{r} \right) - \frac{2}{3} \rho k \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial \theta} - \overline{W} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{V}}{\partial \theta} - \frac{\overline{W}}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nas equações acima é introduzida a viscosidade efetiva, μ_e , definida como soma da viscosidade molecular μ e da viscosidade turbulenta μ_t :

$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad (5.11)$$

As equações de conservação foram adimensionalizadas segundo as seguintes relações:

$$\begin{aligned} U = \frac{\overline{U}}{\overline{U}_{in}} ; \quad V = \frac{\overline{V}}{\overline{U}_{in}} ; \quad W = \frac{\overline{W}}{\overline{U}_{in}} ; \quad P = \frac{\overline{P}}{\rho \overline{U}_{in}^2} ; \\ X = \frac{x}{d} ; \quad R = \frac{r}{d} ; \quad K = \frac{k}{\overline{U}_{in}^2} ; \quad \varepsilon = \frac{\overline{\varepsilon} d}{\overline{U}_{in}^3} ; \\ \rho^* = 1 ; \quad \mu^* = \frac{\mu}{\rho \overline{U}_{in} d} = \frac{1}{Re} ; \quad \mu_t^* = \frac{\mu_t}{\rho \overline{U}_{in} d} \\ \mu_e^* = \mu^* + \mu_t^* \end{aligned} \quad (5.12)$$

resultando no seguinte sistema de equações de conservação na forma adimensional:

- Equação para a componente de velocidade adimensional U

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (WU) + \frac{\partial}{\partial R} (RVU) + \frac{\partial}{\partial X} (RUU) \right] = \\ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e^*}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu_e^* \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(R \mu_e^* \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + S + S_T \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde,

$$\begin{aligned} S = -\frac{\partial P}{\partial X} \\ S_T = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_i^* \frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu_i^* \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(R \mu_i^* \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2}{3} K \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

- Equação para a componente de velocidade adimensional V

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (WV) + \frac{\partial}{\partial R} (RVV) + \frac{\partial}{\partial X} (RUV) \right] = \\ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e^*}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_e^* R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_e^* R \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + S + S_T \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde,

$$\begin{aligned} S = -2 \frac{\mu^*}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \mu^* \frac{V}{R^2} + \frac{W^2}{R} - \frac{\partial P}{\partial R} \\ S_T = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu_i^* \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_i^* \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_i^* \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \\ - 2 \mu_i^* \frac{V}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_i^* \frac{W}{R} \right) - 2 \frac{\mu_i^*}{R^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{2}{3} K \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

- Equação para a componente de velocidade adimensional W

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (WW) + \frac{\partial}{\partial R} (RVW) + \frac{\partial}{\partial X} (RUW) \right] = \\ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e^*}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_e^* R \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_e^* R \frac{\partial W}{\partial X} \right) \right] + S + S_T \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde,

$$\begin{aligned}
 S &= 2 \frac{\mu^*}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu^* \frac{W}{R^2} - \frac{WV}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
 S_T &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\mu_t^*}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + 2\mu_t^* \frac{V}{R} \right) - \frac{2}{3} K \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\mu_t^* \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_t^* \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \\
 &\quad + \frac{\mu_t^*}{R} \left(\frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{R} \right)
 \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.2.3 Transformação de Coordenadas

A transformação de coordenadas usada neste trabalho foi implementada por Possamai et al. (1995). Segundo os autores, para pequenos ângulos de inclinação do disco frontal (palheta), é possível a utilização de uma versão simplificada das equações transformadas. Esta versão simplificada é adotada no presente trabalho.

A base da transformação é a definição de uma nova coordenada η definida como:

$$\eta = \frac{X}{\delta} \quad ; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5.19)$$

onde δ representa o afastamento local entre palheta e assento, podendo ser calculado pela seguinte expressão:

$$\delta = \frac{s_c}{d} - R \tan \alpha \cos \theta \quad (5.20)$$

com s_c/d sendo o afastamento adimensional na linha de centro do difusor, α o ângulo de inclinação da palheta, R a posição radial adimensional e θ o ângulo circunferencial (conforme Figura 5.2). O efeito da transformação de coordenadas é ilustrado na Figura 5.4.

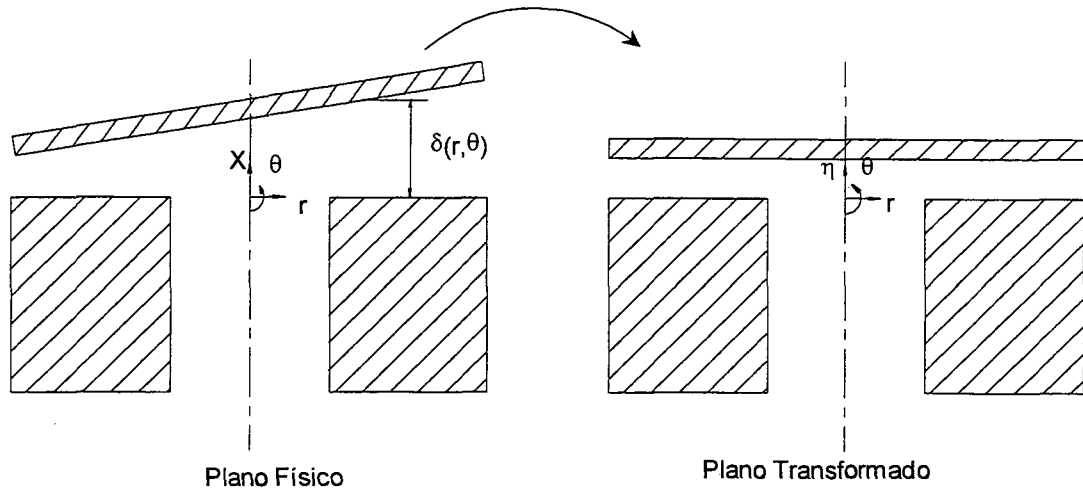


Figura 5.4: Efeito da transformação de coordenadas.

Para pequenos ângulos de inclinação, as derivadas cruzadas são desconsideradas e, assim, a derivada da coordenada X em relação a η é dada por:

$$\frac{dX}{d\eta} = \delta(r, \theta) \quad (5.21)$$

Usando a relação anterior, as equações de conservação para o novo sistema coordenado η , R e θ podem ser escritas da seguinte forma:

- Equação transformada para a componente de velocidade adimensional U

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (WU) + \frac{\partial}{\partial R} (RVU) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (RUU) \right] = \\ \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e^*}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu_e^* \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R \mu_e^*}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right] + S + S_T \end{aligned} \quad (5.22)$$

onde,

$$S = -\frac{1}{\delta} \frac{\partial P}{\partial \eta}$$

$$S_T = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_t^*}{\delta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{R \mu_t^*}{\delta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{R \mu_t^*}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{2}{3} K \right) \quad (5.23)$$

- Equação transformada para a componente de velocidade adimensional V

$$\frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (WV) + \frac{\partial}{\partial R} (RVV) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (RUV) \right] =$$

$$\frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e^*}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_e^* R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_e^* R}{\delta} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \right] + S + S_T \quad (5.24)$$

onde,

$$S = -2 \frac{\mu^*}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \mu^* \frac{V}{R^2} + \frac{W^2}{R} - \frac{\partial P}{\partial R}$$

$$S_T = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu_t^* \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_t^* \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t^* \frac{\partial W}{\partial R} \right) +$$

$$-2 \mu_t^* \frac{V}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t^* \frac{W}{R} \right) - 2 \frac{\mu_t^*}{R^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{2}{3} K \right) \quad (5.25)$$

- Equação transformada para a componente de velocidade adimensional W

$$\frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (WW) + \frac{\partial}{\partial R} (RVW) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (RUW) \right] =$$

$$\frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e^*}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_e^* R \frac{\partial W}{\partial R} \right) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu_e^* R}{\delta} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \right] + S + S_T \quad (5.26)$$

onde,

$$S = 2 \frac{\mu^*}{R^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu^* \frac{W}{R^2} - \frac{WV}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

$$S_T = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\frac{\mu_t^*}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + 2 \mu_t^* \frac{V}{R} \right) - \frac{2}{3} K \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\mu_t^* \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{R \delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu_t^* \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu_t^*}{R} \left(\frac{\partial W}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{R} \right) \quad (5.27)$$

A transformação é necessária apenas na região do difusor mas para não resolver dois domínios em separado (orifício de passagem e difusor), a transformação é aplicada a todo o domínio. Na região do orifício de passagem da válvula, onde não é necessária a transformação, especifica-se $\delta = 1$, mantendo assim as equações sua forma original. Na região do difusor calcula-se δ da relação (5.20).

Além das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento, os modelos de turbulência também precisam ser escritos para o novo sistema de coordenadas. Os modelos k- ϵ de Launder e Sharma (1974), RNG k- ϵ de Orzag e Yakhot (1986) e k- ω de Wilcox (1994) na forma adimensional são escritos da seguinte maneira após a transformação:

- Modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (UK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (VK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (WK) = \\ \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_K} \right) \frac{1}{\delta} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial R} \right] + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial \theta} \right] + P_K - \epsilon - D \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde,

$$\begin{aligned} P_K = 2\nu_t^* \left[\left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{R} \right)^2 \right] + \nu_t^* \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)^2 + \\ + \nu_t^* \left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial W}{\partial \eta} + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)^2 + \nu_t^* \left(\frac{\partial W}{\partial R} - \frac{W}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$D = 2\nu \left[\left(\frac{1}{\delta} \frac{\partial K^{1/2}}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial K^{1/2}}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{1}{R} \frac{\partial K^{1/2}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (U\varepsilon) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RV\varepsilon) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (W\varepsilon) = \\
\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{1}{\delta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right] + \\
+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right] + \frac{\varepsilon}{K} (c_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 1} P_K - c_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \varepsilon) + E
\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde,

$$E = 2\nu^* \nu_t^* \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \right)^2 \right] \tag{5.32}$$

- Modelo RNG k-ε de Orzag e Yakhot (1986)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (UK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (VK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (WK) = \\
\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{1}{\delta} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R (\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial K}{\partial R} \right] + \\
+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial K}{\partial \theta} \right] + P_K - \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (U\varepsilon) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RV\varepsilon) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (W\varepsilon) = \\
\frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{1}{\delta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R (\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right] + \\
+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[(\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right] + \frac{\varepsilon}{K} (c_{\varepsilon 1} P_K - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) - R
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde γ é dado pela equação (3.53), R pela equação (3.54) e P_K pela equação (5.29).

- Modelo k- ω de Wilcox (1994)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (UK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (VK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (WK) = \\ \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_K} \right) \frac{1}{\delta} \frac{\partial K}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial R} \right] + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial \theta} \right] + P_K - c_K f_K \omega K \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} (U\omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RV\omega) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (W\omega) = \\ \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\omega} \right) \frac{1}{\delta} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial R} \right] + \\ + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\left(\mu^* + \frac{\mu_t^*}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right] + c_{\omega 1} f_\omega \frac{\omega}{K} P_K - c_{\omega 2} \omega^2 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Maiores detalhes dos modelos acima, assim como o valor das constantes usadas em cada um deles, podem ser obtidos no capítulo 3. A metodologia numérica para a solução das equações de conservação acima foi apresentada no capítulo 4.

5.3. Validação do Código Computacional

De maneira a verificar a correta implementação do código computacional a ser utilizado para a simulação do escoamento, foi realizada uma série de testes. O primeiro deles considerou a situação de número Reynolds reduzido, Re , para a qual é possível obter-se uma solução analítica de boa precisão para a região do difusor, com exceção da entrada onde os efeitos de inércia se manifestam. O desenvolvimento do código para o escoamento tridimensional, foi realizado a partir de um código bidimensional, implementado em etapa anterior. Assim, um teste natural foi comparar as soluções fornecidas pelos dois códigos para uma situação bidimensional de escoamento, tanto em regime laminar como em regime turbulento. Comparações foram também

possíveis de serem realizadas usando-se resultados numéricos independentes de outros autores. Os resultados de tais testes são apresentados a seguir.

5.3.1. Comparação com Solução Analítica

Em situações de escoamento com números de Reynolds reduzidos e pequenos afastamentos da palheta, os efeitos viscosos predominam sobre os efeitos de inércia. No caso de palheta paralela, onde o escoamento é axissimétrico, é possível desprezar os termos de inércia e obter uma solução analítica da distribuição de pressão adimensional sobre a palheta, através da integração da equação do movimento na direção radial. Em termos adimensionais, esta distribuição é dada por,

$$P^*(R) = \frac{3 \ln[0,5(D/d)/R]}{Re(s/d)^3} \quad (5.37)$$

onde,

$P^*(R)$ - pressão adimensional em uma posição R na palheta $[= p/(\rho \bar{U}_{in}^2 / 2)]$;

s / d - afastamento adimensional entre a palheta e o assento;

Re - número de Reynolds $(= \rho \bar{U}_{in} d / \mu)$;

D / d - relação entre o diâmetro da palheta, D , e o diâmetro do orifício de passagem, d ;

R - posição radial adimensional $(= r / d)$;

\bar{U}_{in} - velocidade média do escoamento no orifício de passagem.

A Figura 5.5 mostra a comparação entre as distribuições de pressão obtidas numérica e analiticamente para a condição $Re = 70$, $s/d = 0,01$ e $\alpha = 0^\circ$. Observa-se a boa concordância entre o resultado numérico e a solução analítica.

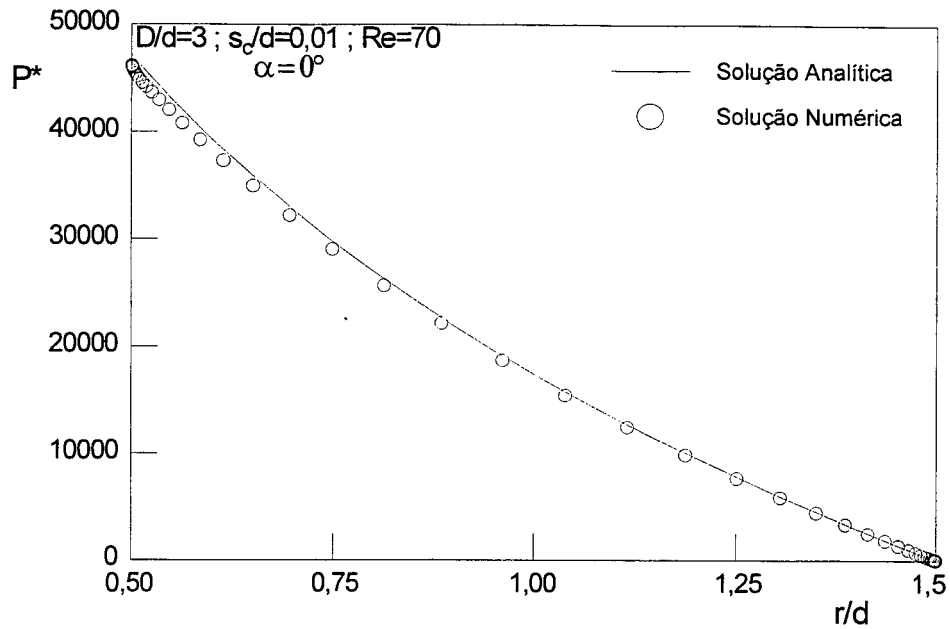


Figura 5.5: Comparação entre a solução numérica e analítica; $Re = 70$, $s_c/d = 0,01$, $\alpha = 0^\circ$.

5.3.2. Comparação entre as Soluções obtidas com os Códigos 2D e 3D

Quando o modelo computacional tridimensional é resolvido para um ângulo de inclinação do disco frontal nulo ($\alpha = 0^\circ$), o resultado deve ser igual àquele que seria obtido, caso o modelo computacional bidimensional fosse utilizado. Portanto, este é um bom teste para a verificação da implementação do código tridimensional. Deve ser mencionado que o código bidimensional, usado para realizar esta comparação, foi implementado e validado numa etapa anterior à implementação do código tridimensional.

As Figuras 5.6 e 5.7 mostram, para $s_c/d = 0,05$, comparações entre os resultados de distribuição de pressão adimensional $P^* [= p/(\rho \bar{U}_{in}^2 / 2)]$ obtidos com os dois códigos para as condições de escoamentos laminar e turbulento, respectivamente. Observa-se em ambas as figuras, a concordância perfeita entre os resultados.

5.3.3. Comparação com Resultados de Outros Autores

Uma última etapa de verificação da implementação do código computacional foi realizada através da comparação de resultados numéricos de distribuição de pressão adimensional P^* , obtidas com os códigos implementados aqui e com aqueles de outros autores (Langer et al., 1993 e Possamai, 1994).

Inicialmente, na Figura 5.8 é feita uma comparação com os resultados obtidos por Langer et al. (1993) para o escoamento turbulento através do difusor com discos paralelos, empregando o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974). De forma geral, observa-se na figura uma boa concordância entre os resultados, apesar de uma visível diferença na região de estagnação ($r/d < 0,5$). Deve ser mencionado que a malha computacional e o arranjo colocalizado foram os mesmos nas duas metodologias. Assim, a razão desta diferença não é fácil de ser explicada e pode estar associada a outros detalhes da simulação de Langer et al. (1993), não disponíveis. Mesmo assim o nível de concordância entre os resultados foi considerado aceitável.

Nas Figuras 5.9 a 5.11 apresentam-se comparações entre as distribuições de pressão P^* , obtidas com o código desenvolvido neste trabalho, com aquelas obtidas por Possamai (1994). As situações consideram o escoamento em regime laminar e a palheta tanto paralela como inclinada em relação ao assento. A malha computacional utilizadas nas duas metodologias foi a mesma. No entanto, enquanto Possamai (1994) utilizou um arranjo desencontrado de variáveis e resolveu a região sólida do assento, no código aqui implementado adota-se um arranjo colocalizado de variáveis e não se inclui a região sólida no domínio de cálculo. Apesar das diferenças nas metodologias, as figuras revelam uma boa concordância entre os resultados.

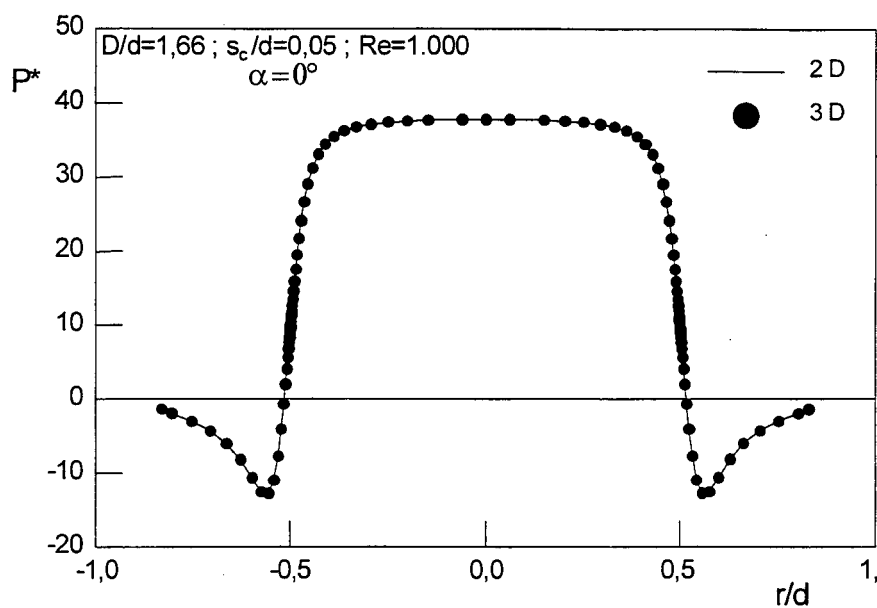


Figura 5.6: Comparação entre as soluções dos códigos 2D e 3D para escoamento laminar: $Re = 1.000$, $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 0,0^\circ$

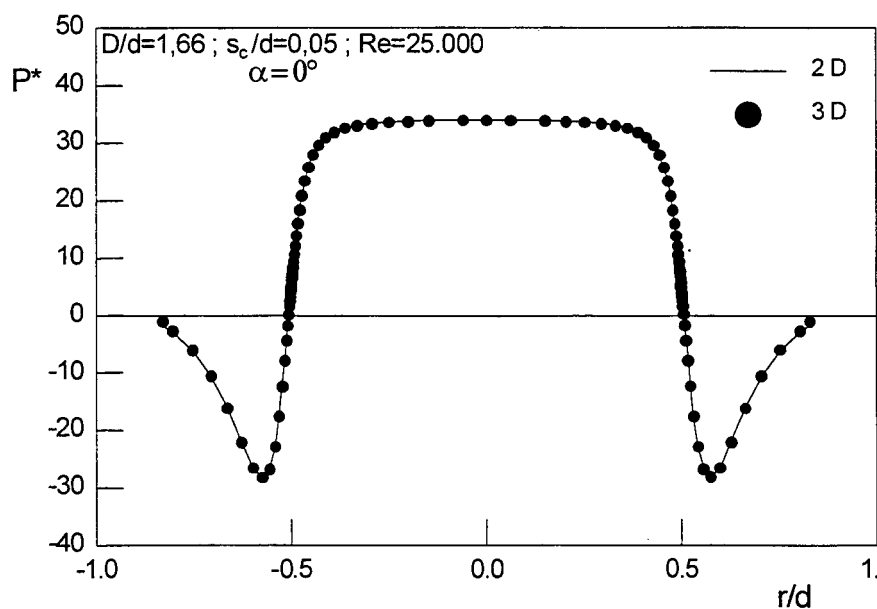


Figura 5.7: Comparação entre as soluções dos códigos 2D e 3D para escoamento turbulento: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 0,0^\circ$

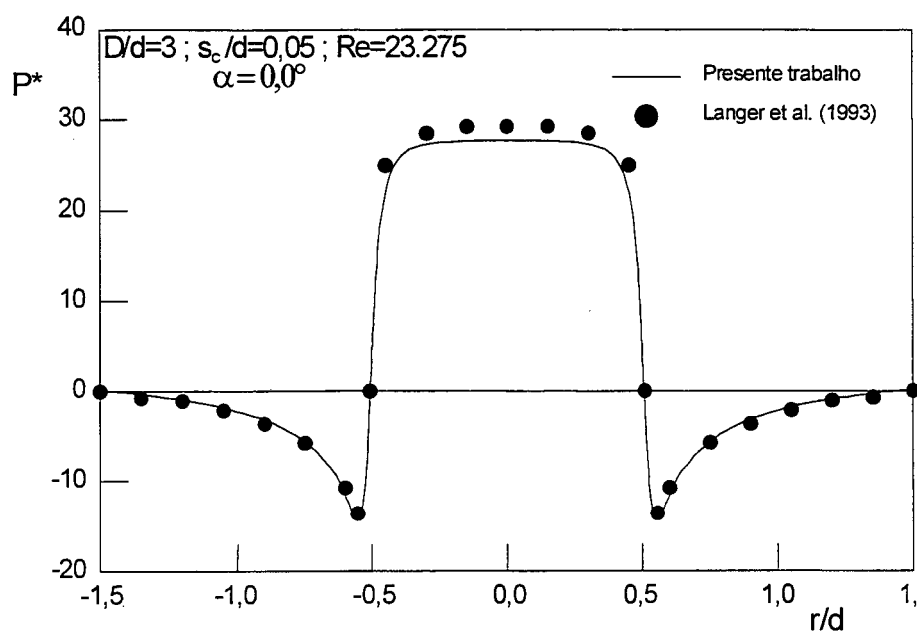


Figura 5.8: Comparação entre as distribuições de pressão sobre a palheta obtidas por Langer *et al.* (1993) e no presente trabalho.

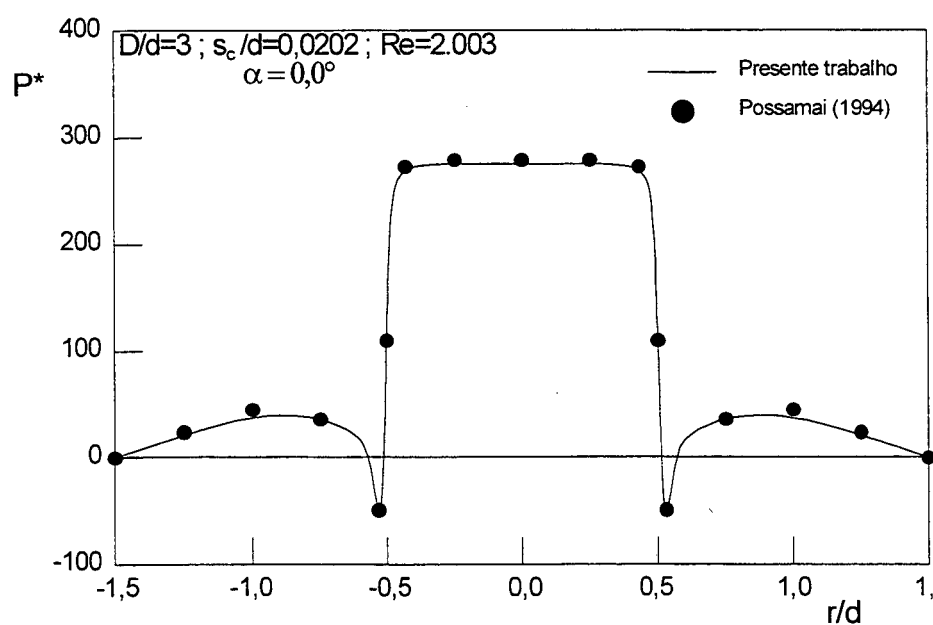


Figura 5.9: Comparação das distribuições de pressão sobre a palheta obtidas por Possamai (1994) e no presente trabalho.

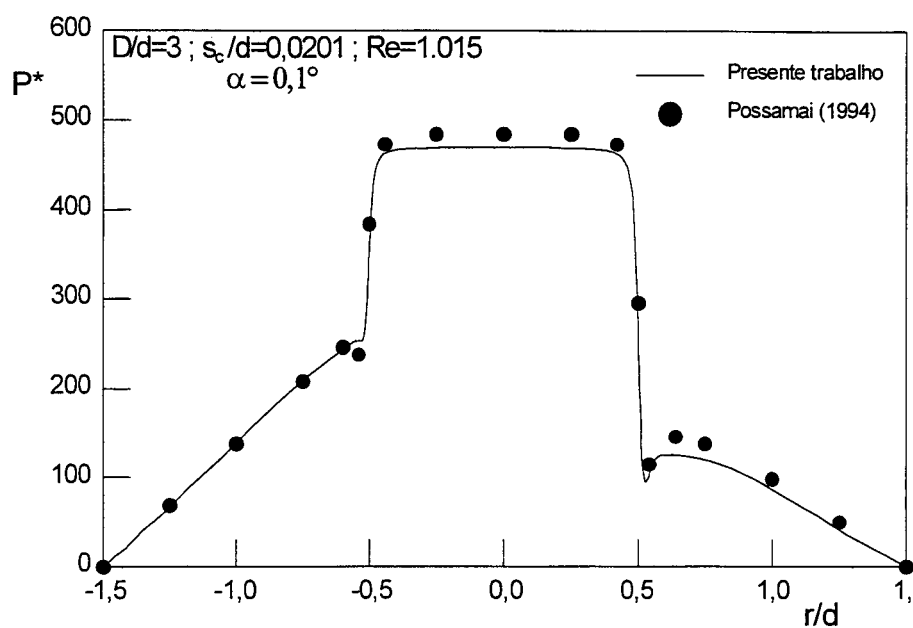


Figura 5.10: Comparação das distribuições de pressão sobre a palheta obtidas por Possamai (1994) e no presente trabalho.

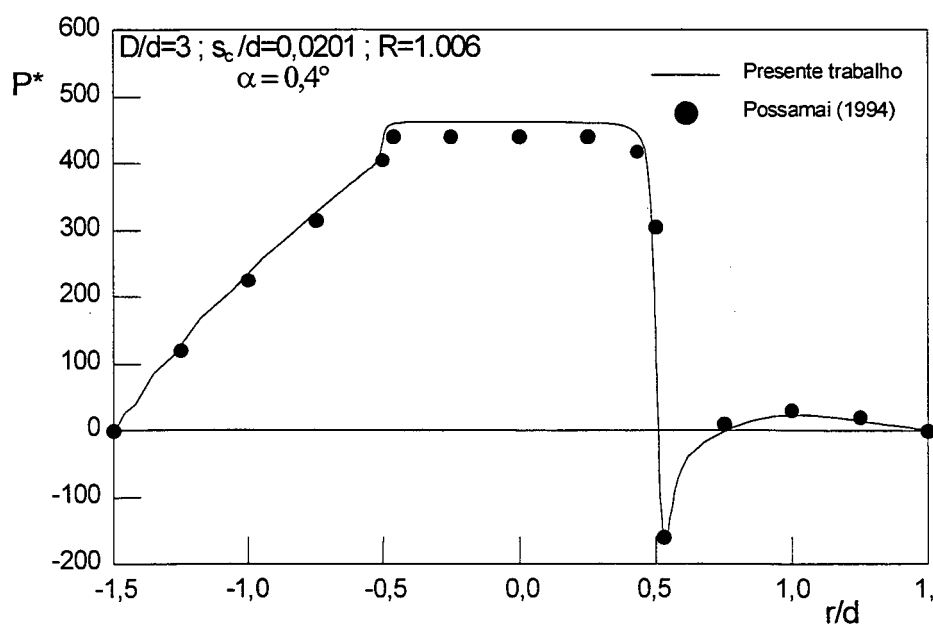


Figura 5.11: Comparação entre as distribuições de pressão sobre a palheta obtidas por Possamai (1994) e no presente trabalho.

5.4 Análise dos Modelos de Turbulência

Como foi mencionado anteriormente, três modelos de turbulência a duas equações foram implementados: i) o modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974), ii) o modelo RNG k- ϵ de Orzag e Yakhot (1986) e iii) o modelo k- ω de Wilcox (1994). Os resultados numéricos obtidos com cada um deles foram comparados com dados experimentais de pressão sobre a palheta obtidos por Deschamps et. al (1999), a fim de verificar qual dos modelos é o mais adequado para a previsão do escoamento em difusores radiais. Uma descrição da bancada experimental pode ser encontrada em Salinas Casanova et al. (1999).

No caso do modelo RNG k- ϵ foram testadas duas versões. A primeira delas, denominada Modelo 1, define a viscosidade turbulenta dimensional como indicada no capítulo 3:

$$\mu_t = 2\rho \sqrt{\frac{c_\mu}{v}} \frac{k}{\sqrt{\epsilon}} + c_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.38)$$

A segunda, denominada Modelo 2, adota a definição para a viscosidade turbulenta dimensional na forma tradicional dos modelos k- ϵ :

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (5.39)$$

Os resultados obtidos com o modelo k- ω de Wilcox (1994) não foram satisfatórios, apresentando uma grande discordância com os dados experimentais. Por esta razão, este modelo foi descartado do restante das simulações do trabalho e a investigação da origem de sua previsão inadequada é deixada fora dos objetivos deste trabalho. De fato, em função da variável ω não ser muito discutida em trabalhos da literatura, uma análise mais profunda do modelo focando este aspecto é deixada como sugestão para um trabalho futuro.

Na análise comparativa a seguir são considerados somente os modelos k- ϵ de Launder e Sharma (1974) e as duas versões do modelo RNG k- ϵ de Orzag e Yakhot (1986) mencionadas acima (Modelo 1 e Modelo 2). Para efeito de economia computacional toda a análise foi realizada

para a situação bidimensional de escoamento, onde a palheta é posicionada paralela ao assento. Obviamente, a análise do desempenho dos modelos só tem sentido, se a malha computacional adotada garantir boa precisão para o resultado numérico. Desta forma, antes desta etapa foi realizada uma investigação cuidadosa de erros de truncamento em função do refino de malha. Os resultados dos testes de refino de malha são apresentados na seção 5.5, juntamente com outros testes para a validação da solução numérica.

Todos os resultados a serem apresentados aqui se referem a um número de Reynolds igual a 25.000. Assim, os quatro casos explorados consideram variações geométricas de afastamento entre os discos, s/d , e de relação de diâmetros, D/d , como indicado abaixo:

- Caso 1: $D/d = 1,66$ e $s/d = 0,05$;
- Caso 2: $D/d = 1,66$ e $s/d = 0,07$;
- Caso 3: $D/d = 3,00$ e $s/d = 0,05$;
- Caso 4: $D/d = 3,00$ e $s/d = 0,07$.

Nas Figuras 5.12 e 5.13 são mostradas comparações entre as distribuições de pressão adimensional P^* sobre a palheta, obtidas com os três modelos e experimentalmente. Na Figura 5.12(a) observa-se que o modelo de Launder e Sharma (1974) e o Modelo 1 (RNG $k-\epsilon$ com μ_t na forma original) concordam bem com o resultado experimental na região de estagnação ($r/d < 0,5$), mas o mesmo não acontece na região do difusor ($r/d > 0,5$), onde a pressão manométrica é negativa. Por outro lado, o Modelo 2 (RNG $k-\epsilon$ com μ_t na forma usual de outros modelos $k-\epsilon$) apresenta boa concordância na região do difusor mas se afasta um pouco dos dados experimentais na região de estagnação. Observa-se na Figura 5.12(b), que com o aumento do afastamento entre a palheta e o assento para $s/d = 0,07$, todos os modelos discordam dos dados experimentais na região de estagnação. Novamente, o Modelo 2 é o que apresenta melhor concordância com as medições na região do difusor ($r/d > 0,5$). A Figura 5.13 mostra as distribuições de pressão para as mesmas condições da Figura 5.12, somente que para uma relação de diâmetros maior ($D/d = 3$). Na Figura 5.13(a) observa-se que o único modelo que compara bem com o resultado experimental na região de estagnação é o modelo de Launder e Sharma (1974) apesar de apresentar uma grande discrepância na região do difusor. Embora com alguma imprecisão na região de estagnação ($r/d < 0,5$), o Modelo 2 é o que compara melhor na região do difusor ($r/d > 0,5$). Já o Modelo 1 apresenta uma distribuição de pressão intermediária aos outros dois modelos.

Finalmente para caso 4, representado na Figura 5.13(b), observa-se que com o aumento do afastamento entre a palheta e o assento, a distribuição de pressão prevista pelo modelo de Launder e Sharma (1974) se afasta do resultado experimental ao longo de toda a superfície da palheta. Os Modelos 1 e 2 possuem desempenhos distintos, com o Modelo 1 sendo melhor na região de estagnação e o Modelo 2 com melhor concordância na região do difusor.

Analisando as Figuras 5.12 e 5.13 pode-se observar que tanto o modelo de Launder e Sharma (1974) como o Modelo 1, apresentam uma discrepância significativa em relação aos dados experimentais na região do difusor. Já para o Modelo 2, a distribuição de pressão na região do difusor apresenta-se em boa concordância com as medições, independentemente do afastamento, embora na região de estagnação a qualidade dos resultados não seja tão boa.

A fim de compreender melhor a razão das diferenças nos resultados de distribuição de pressão sobre a palheta obtidos pelos modelos de turbulência, foram preparadas as Figuras 5.14 a 5.23. Nelas, resultados de linhas de corrente, escalas de comprimento, intensidade da turbulência, tensões de Reynolds e relação entre viscosidade turbulenta e viscosidade molecular, μ_t/μ , são apresentados para os três modelos na região de entrada do difusor, considerando a relação de diâmetros $D/d = 3$.

A Figura 5.14 mostra as linhas de corrente obtidas com os modelos para o Caso 3 ($s/d = 0,05$; $D/d = 3$). Observa-se claramente a separação do escoamento na entrada do difusor, formando uma região de recirculação. Esta separação é imposta pela quina, na saída do orifício de passagem, em torno da qual o escoamento não consegue avançar devido à sua inércia. É interessante notar que o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974) produz a menor região de recirculação, enquanto a maior é prevista pelo Modelo 2. O mesmo padrão para as previsões dos modelos é observado no afastamento maior do Caso 4, $s/d = 0,07$, conforme a Figura 5.15. Estes resultados de linhas de corrente permitem, agora, explicar as diferenças observadas entre as distribuições de pressão, obtidas com os três modelos.

A partir das Figuras 5.13(a) e 5.14, pode ser observado que o aumento da região de recirculação, provoca uma diminuição na área de passagem do escoamento na entrada do difusor, acelerando o escoamento e diminuindo a pressão na região. Por sua vez, a diminuição da área de escoamento, cria uma restrição maior ao escoamento na entrada do difusor, dificultando sua passagem e, portanto, aumentando a pressão na região de estagnação. O mesmo comportamento acontece para o maior afastamento do Caso 4 ($s/d = 0,07$). Comparando-se as Figuras 5.14 e 5.15,

observa-se também que o aumento do afastamento origina regiões de recirculação maiores. No entanto, o aumento do afastamento entre os discos é ainda maior e a área de passagem do escoamento resulta maior do que no Caso 3 ($s/d = 0,05$), gerando uma pressão menor na região de estagnação, como pode ser visto nas Figuras 5.13(a) e (b).

As Figuras 5.16 e 5.17 apresentam isolinhas de escalas de comprimento adimensionais ($L \cong k^{3/2}/\tilde{\epsilon}d$) na região de entrada do difusor para os Casos 3 ($s/d = 0,05$) e 4 ($s/d = 0,04$), respectivamente. Observa-se que as maiores escalas são previstas com o modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974) e as menores acontecem para o Modelo 2. No caso do modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974) os valores das escalas de comprimento são bem elevados e maiores do que o próprio afastamento entre os discos, o que sugere uma previsão de níveis excessivos de turbulência. Por outro lado, as escalas previstas pelos Modelos 1 e 2 de comprimento são bem menores do que as obtidas com o modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974).

Isolinhas de intensidade da turbulência $I [= (2k/3)^{1/2}/\bar{U}_{in}]$ são mostradas nas Figuras 5.18 e 5.19 para os Casos 3 ($s/d = 0,05$) e 4 ($s/d = 0,04$), respectivamente. De maneira similar ao observado para as escalas de comprimento, o modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974) prevê as maiores intensidades e os menores valores são previstos pelo Modelo 2.

Nas Figuras 5.20 e 5.21 são apresentados os níveis das tensões de Reynolds adimensionais ($-\overline{uv}/\bar{U}_{in}^2$) previstas pelos três modelos na entrada do difusor para os Casos 3 e 4, respectivamente. Como as tensões de Reynolds afetam a transferência de quantidade de movimento do escoamento, os níveis mais elevados previstos pelo modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974) resultam em taxas mais elevadas de transferência de quantidade de movimento, fazendo com que o tamanho da região de recirculação diminua e, como consequência, aumentando a área de passagem do escoamento e o nível da pressão na entrada do difusor. Por este motivo, ao prever as menores magnitudes de $-\overline{uv}/\bar{U}_{in}^2$, o Modelo 2 obtém uma grande região de recirculação do escoamento, acarretando uma menor área de escoamento e uma queda mais abrupta da pressão na região de entrada do difusor. Comparando as Figuras 5.20 e 5.21, observa-se que, com o aumento do afastamento entre a palheta e o assento, os níveis das tensões de Reynolds diminuem. Este fenômeno acontece também para a intensidade da turbulência e, para uma mesma vazão (ou número de Reynolds), está associado às menores deformações do escoamento quando os discos estão mais afastados.

Um outro resultado muito ilustrativo da intensidade da turbulência prevista pelos modelos se refere à relação entre as viscosidades turbulenta e molecular, μ_t/μ . Isolinhas para estas relações são mostradas nas Figuras 5.22 e 5.23 para os Casos 3 e 4, respectivamente. O exame das figuras mostra que os níveis de turbulência previstos pelo modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974) são muito elevados quando comparados àqueles obtidos com os Modelos 1 e 2, principalmente na região de entrada do difusor, onde a separação do escoamento ocorre. Por outro lado, verifica-se que a diferença nos valores de μ_t/μ fornecido pelos Modelos 1 e 2, originada pelas definições distintas da viscosidade turbulenta nas equações de conservação, é também bem apreciável e chega a diferir por um fator de dez na entrada do difusor.

Os resultados discutidos acima confirmam algo que já era de se esperar, ou seja, a previsão de níveis excessivos de turbulência pelo modelo k- ϵ de Launder e Sharma (1974) em regiões de grandes deformações do escoamento, como a entrada do difusor. O modelo RNG k- ϵ , devido ao termo R que aparece na equação da dissipação da energia cinética, ϵ (equação 5.34), prevê níveis muito menores para a turbulência. Por esta razão, o modelo resulta em menores taxas de transferência de quantidade de movimento e, conseqüentemente, numa região de recirculação maior. A versão modificada do modelo RNG k- ϵ (Modelo 2), por usar uma definição de viscosidade turbulenta que resulta em valores menores do que no modelo original (Modelo 1), prevê as menores intensidades de turbulência e a maior região de recirculação.

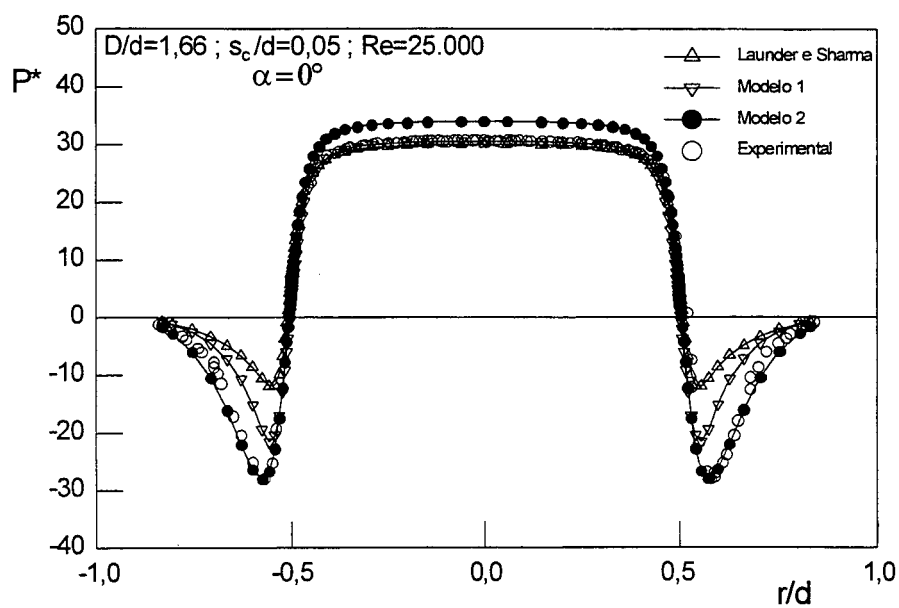
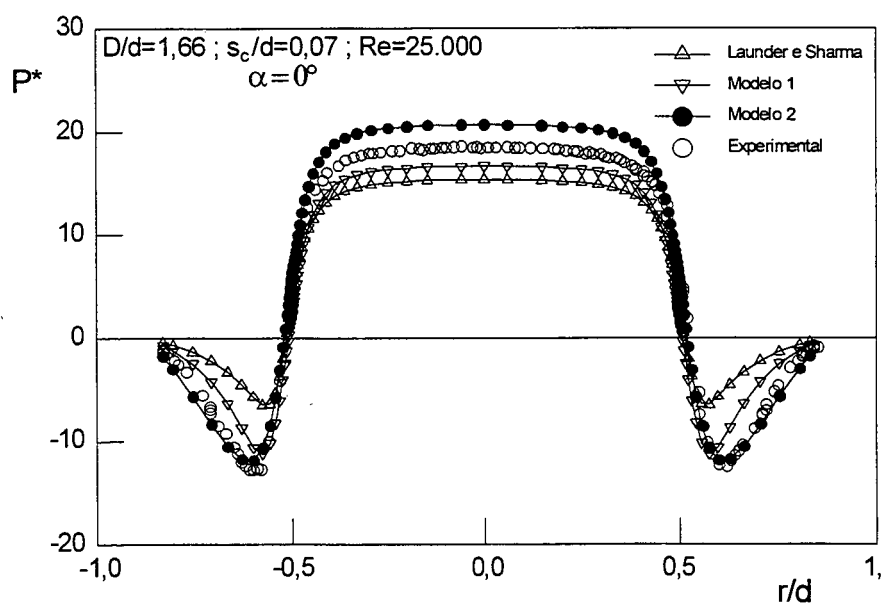
(a) $s_c/d = 0,05$ (caso 1).(b) $s_c/d = 0,07$ (caso 2).

Figura 5.12: Comparação entre as distribuições de pressão sobre a palheta obtidas numérica e experimentalmente para $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

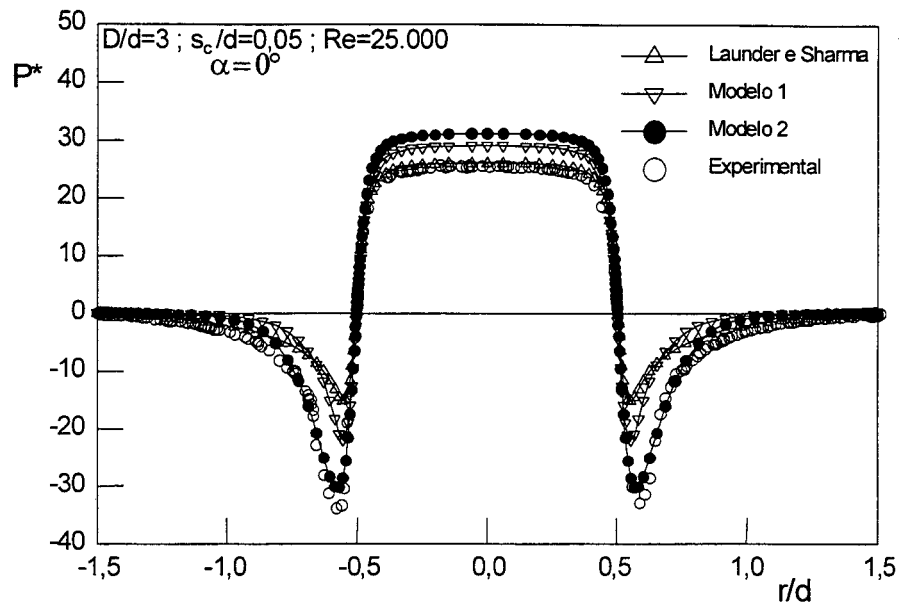
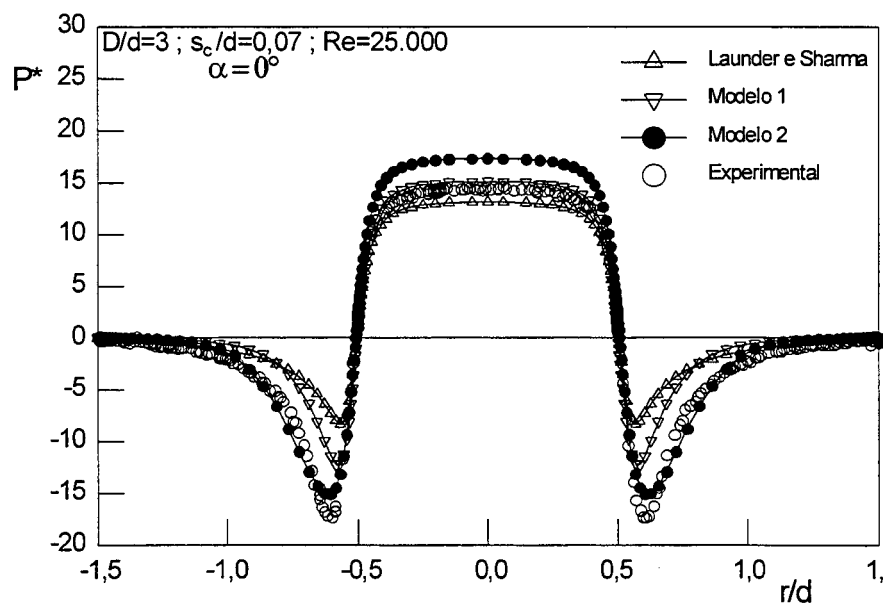
(a) $s_c/d = 0,05$ (caso 3).(b) $s_c/d = 0,07$ (caso 4).

Figura 5.13: Comparação entre as distribuições de pressão sobre a palheta obtidas numérica e experimentalmente para $D/d = 3$ e $\alpha = 0^\circ$.

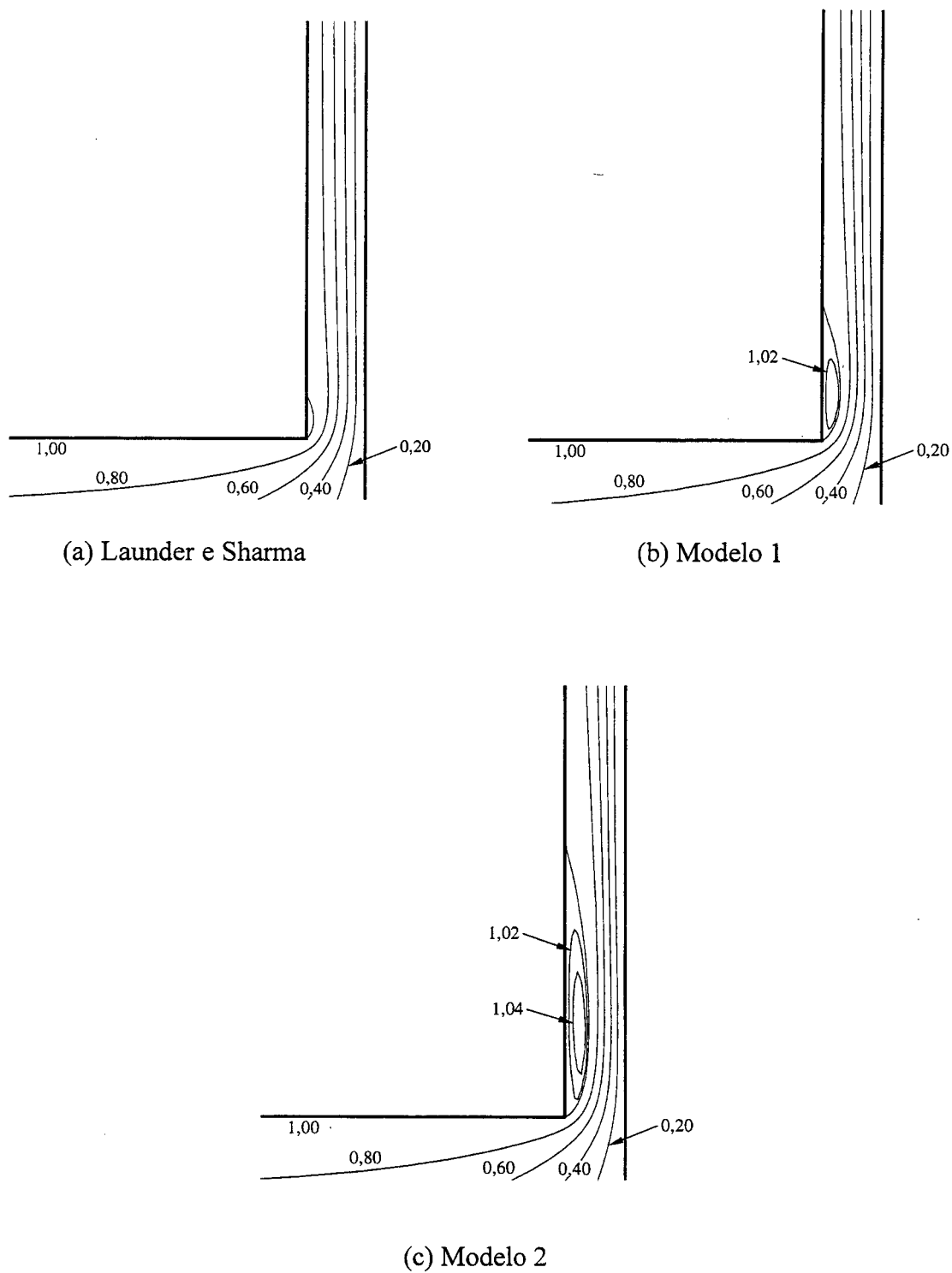
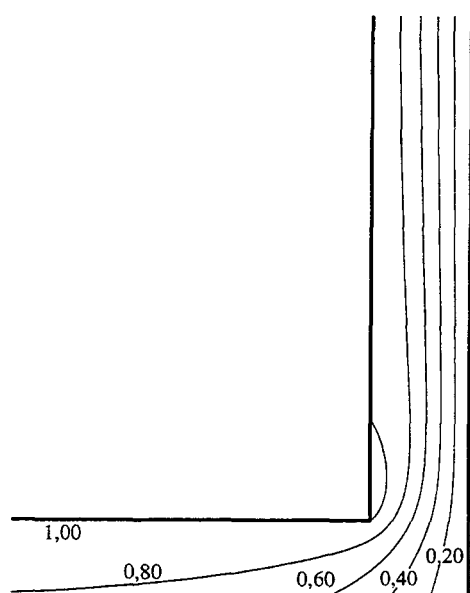
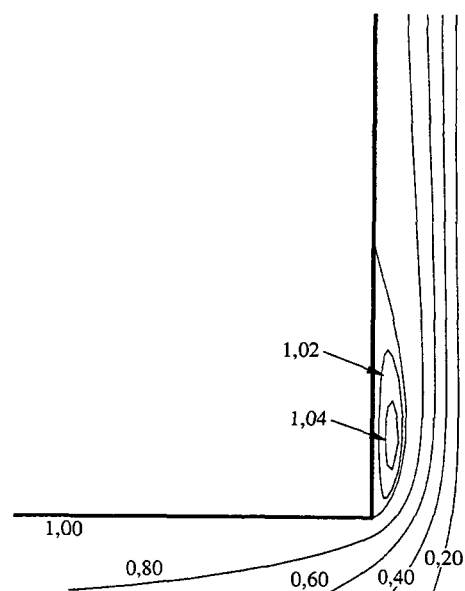


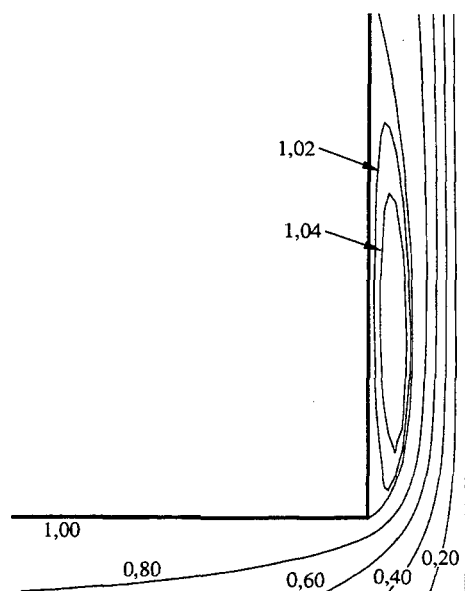
Figura 5.14: Linhas de corrente; $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma

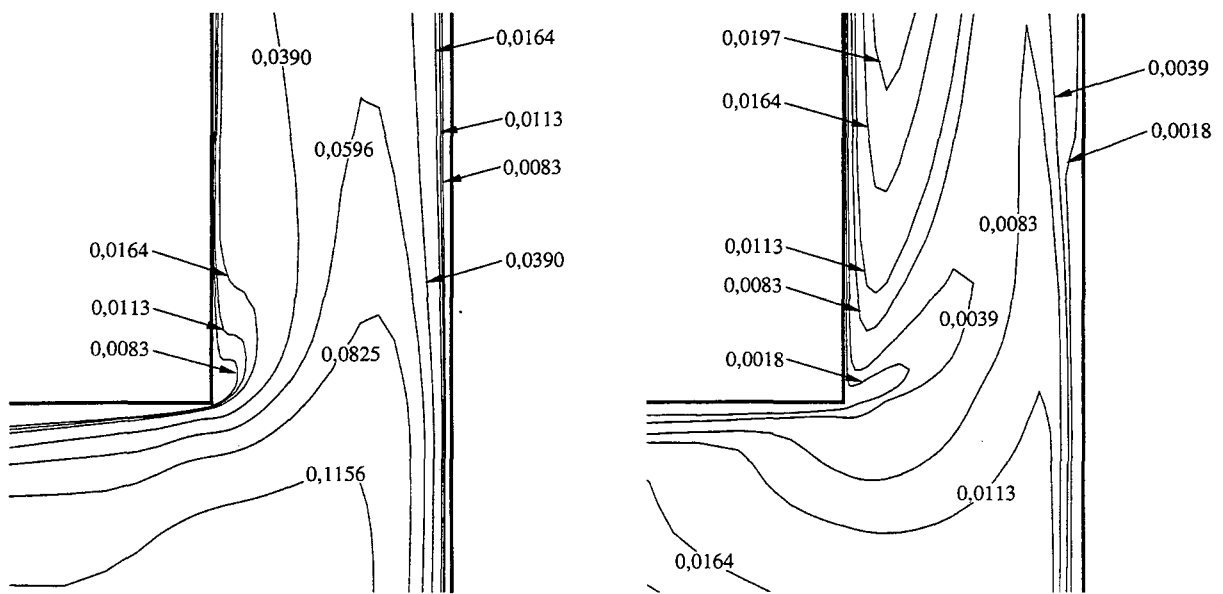


(b) Modelo 1



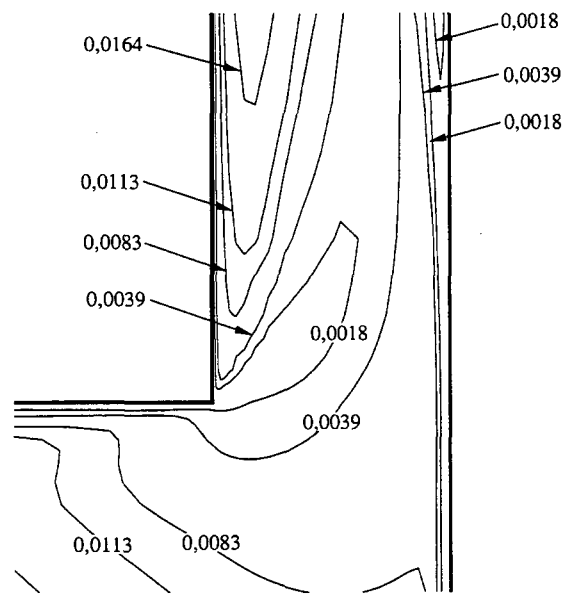
(c) Modelo 2

Figura 5.15: Linhas de corrente; $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $D/d = 3$.



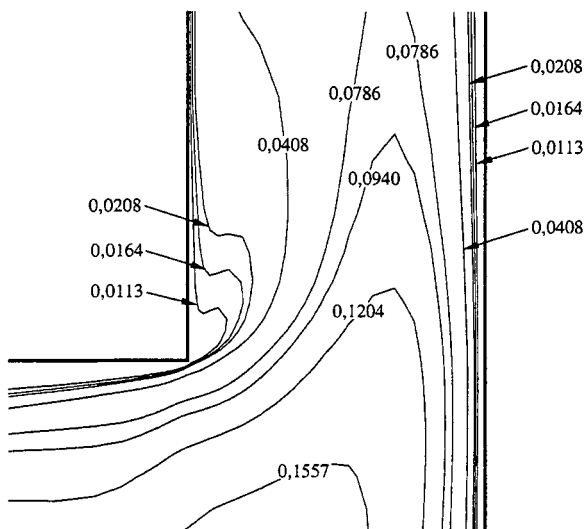
(a) Launder e Sharma

(b) Modelo 1

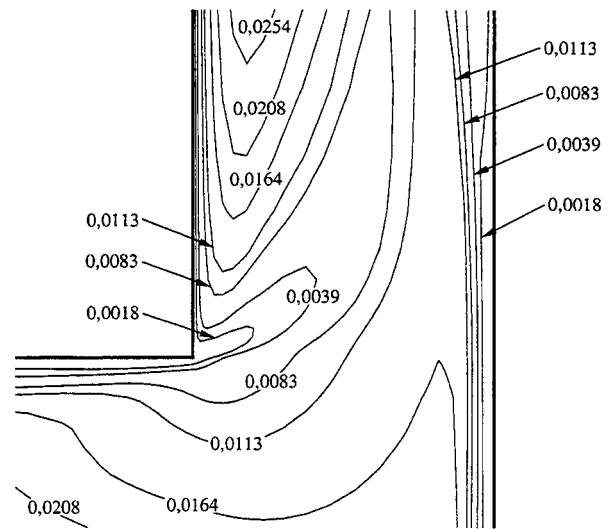


(c) Modelo 2

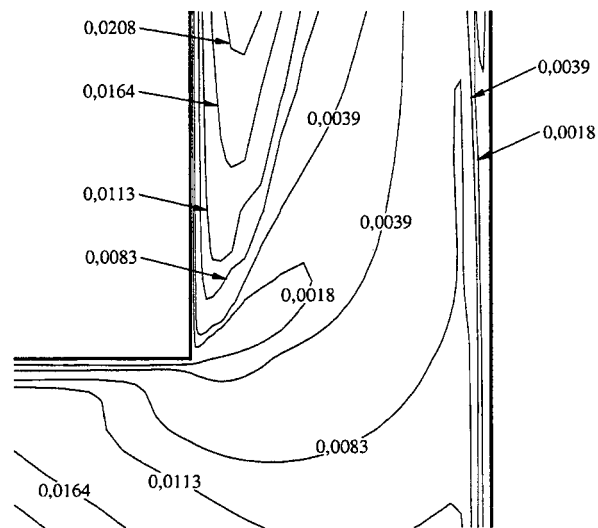
Figura 5.16: Isolinhas de escalas de comprimento: $Re = 25.000$, $s_e/d = 0,05$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma

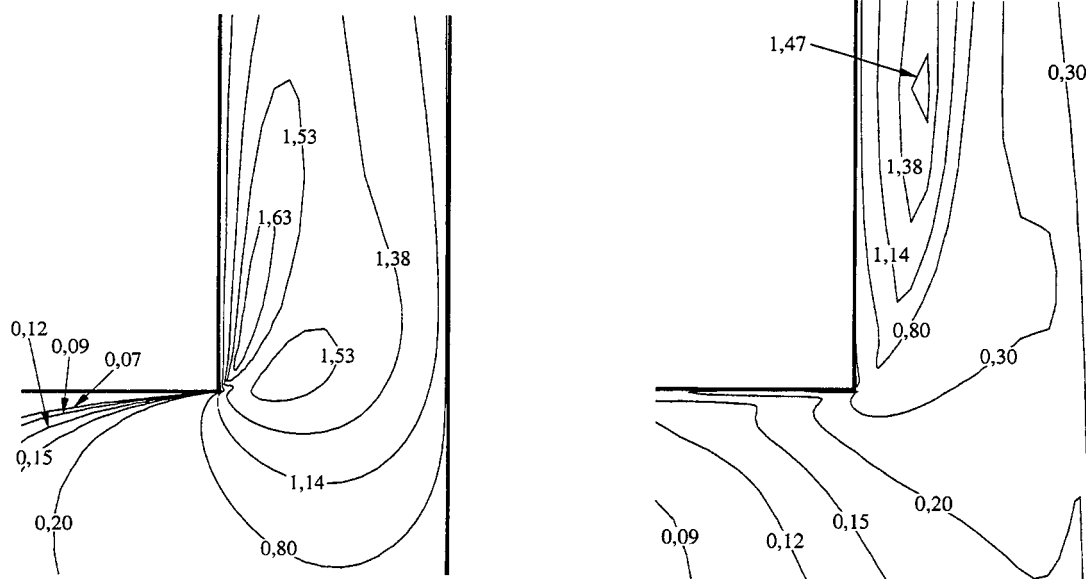


(b) Modelo 1



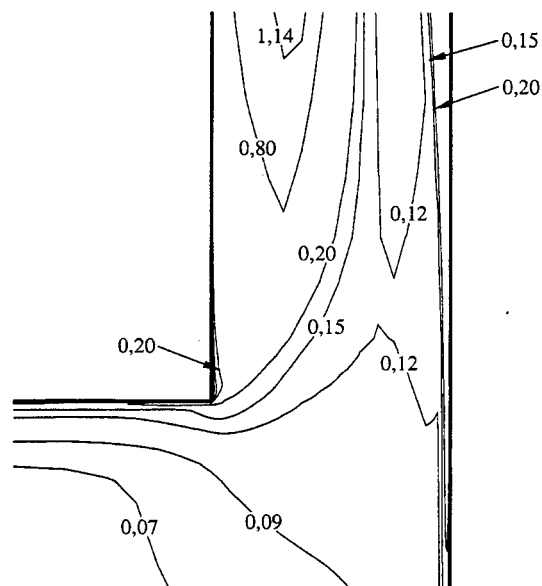
(c) Modelo 2

Figura 5.17: Isolinhas de escalas de comprimento: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $D/d = 3$.



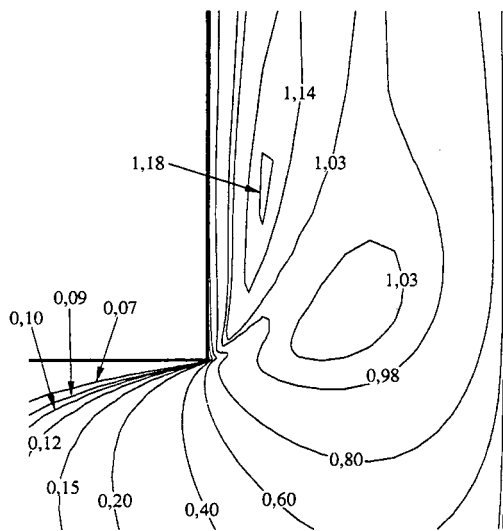
(a) Launder e Sharma

(b) Modelo 1

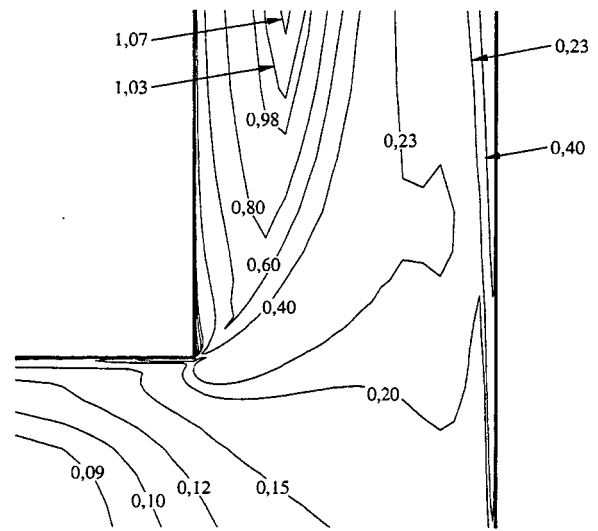


(c) Modelo 2

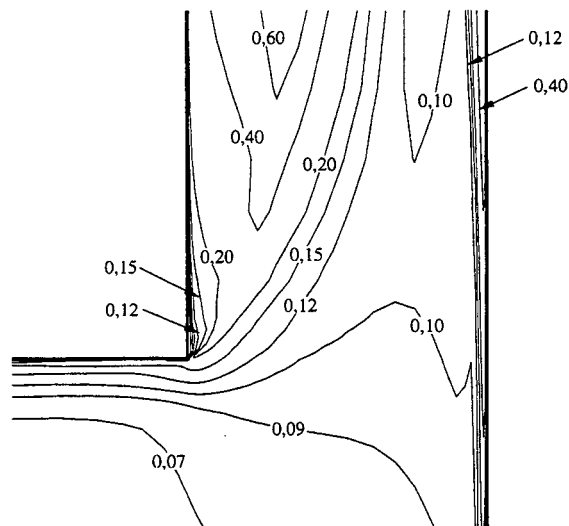
Figura 5.18: Isolinhas de intensidade da turbulência: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma

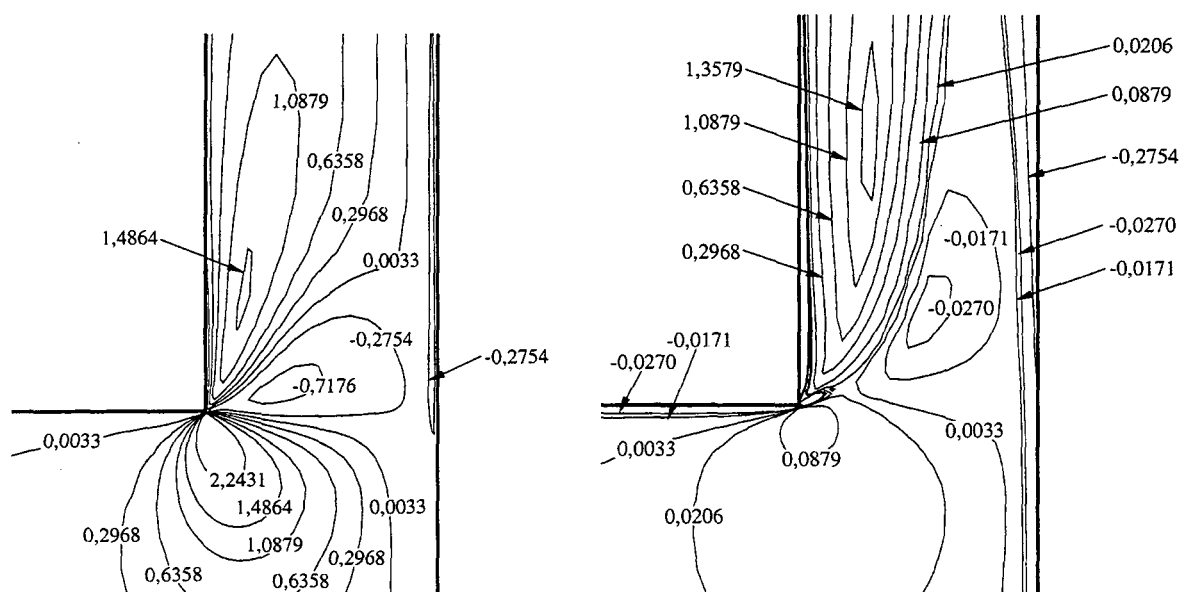


(b) Modelo 1



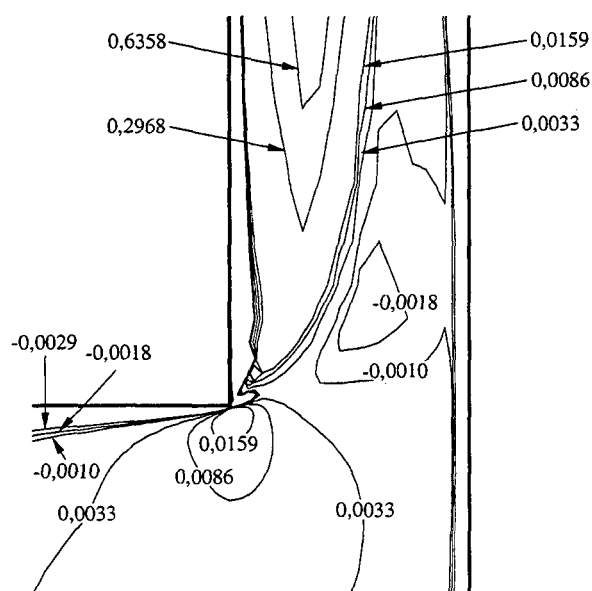
(c) Modelo 2

Figura 5.19: Isolinhas de intensidade da turbulência; $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma

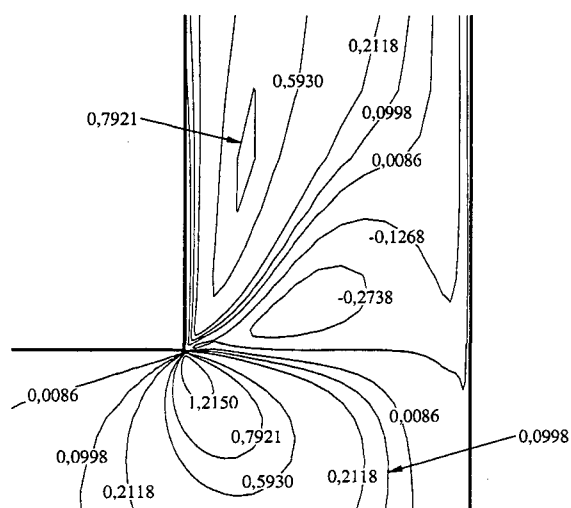
(b) Modelo 1



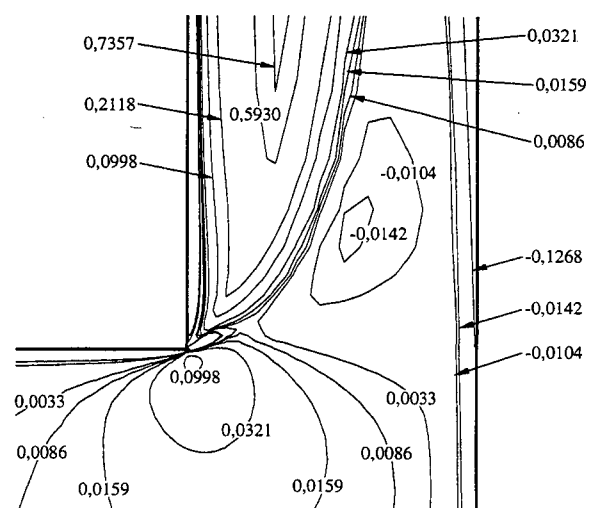
(c) Modelo 2

Figura 5.20: Isolinhas de tensões de Reynolds adimensionais $-\overline{uv}/\overline{U}_{in}^2$;

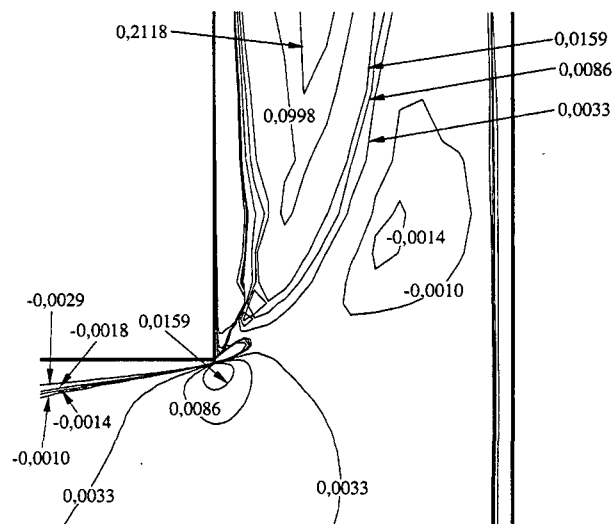
$Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma



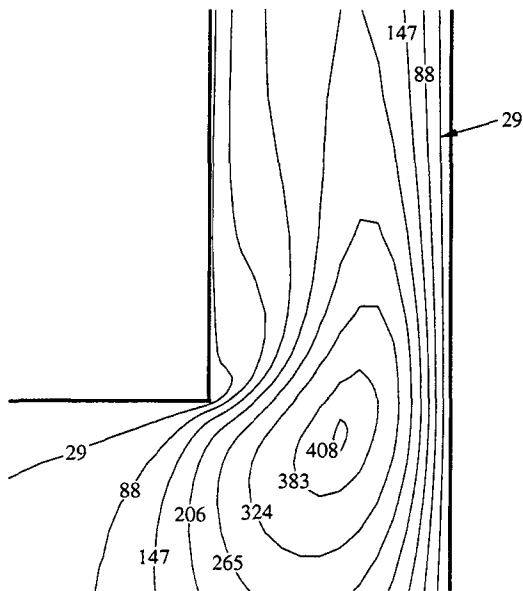
(b) Modelo 1



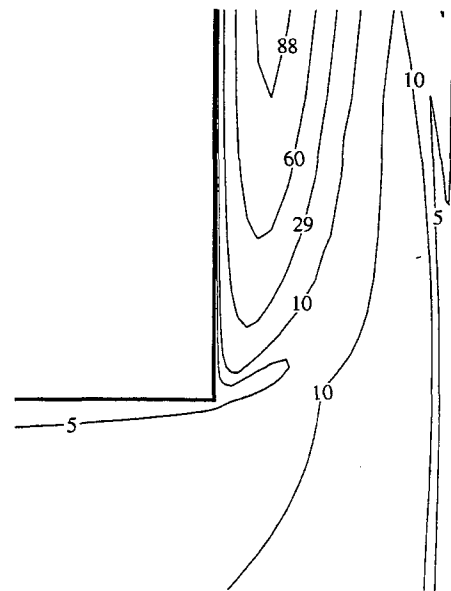
(c) Modelo 2

Figura 5.21: Isolinhas de tensões de Reynolds adimensionais $-\overline{uv}/\overline{U}_{in}^2$;

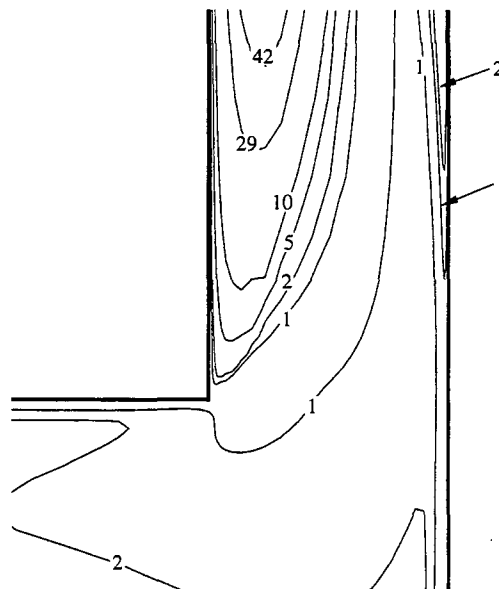
$Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma



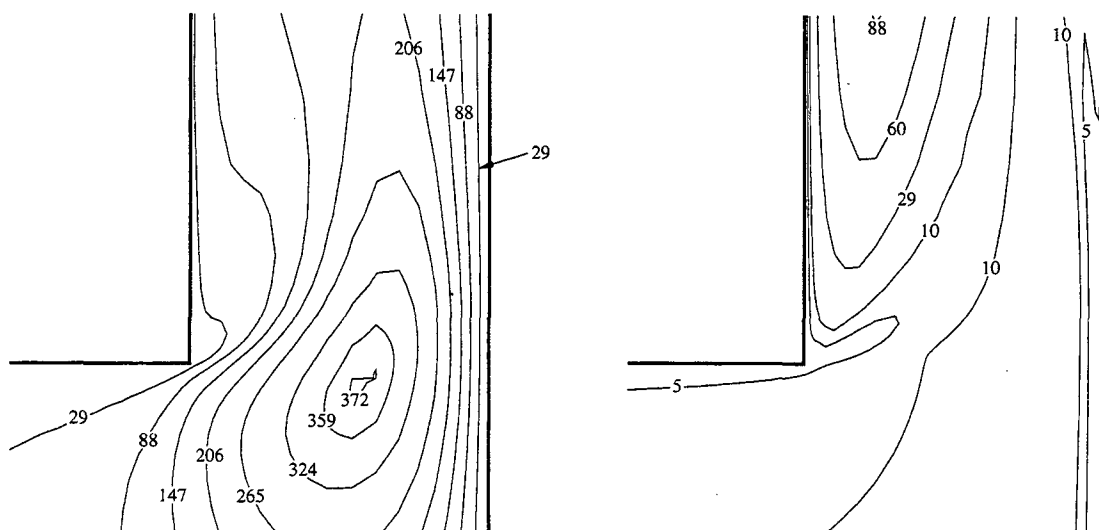
(b) Modelo 1



(c) Modelo 2

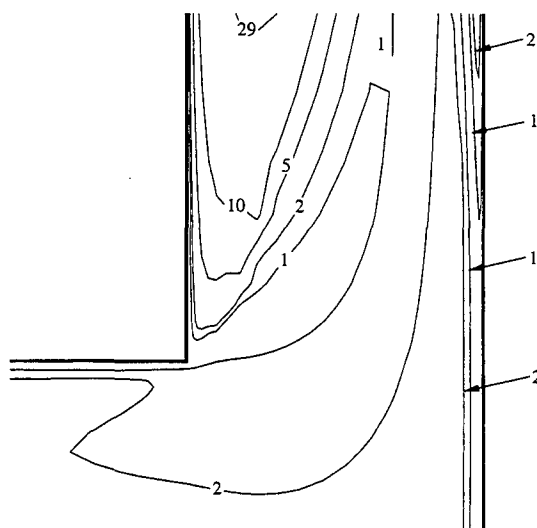
Figura 5.22: Isolinhas para a relação entre as viscosidades turbulenta e molecular μ_t/μ ;

$Re = 25.000$, $s_0/d = 0,05$ e $D/d = 3$.



(a) Launder e Sharma

(b) Modelo 1



(c) Modelo 2

Figura 5.23: Isolinhas para a relação entre as viscosidades turbulenta e molecular μ_t/μ ;
 $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $D/d = 3$.

5.5 Validação da Solução Numérica

A validação da solução numérica foi realizada, em uma primeira etapa, através de testes de sensibilidade em relação a parâmetros adotados na metodologia de cálculo (tais como, refino da malha, comprimento do orifício de passagem, condição de contorno na entrada do orifício de passagem) e, então, através da comparação dos resultados com dados experimentais de distribuição de pressão sobre a palheta, em diferentes condições de escoamento.

5.5.1 Refino da Malha Computacional

A determinação da malha computacional adequada para a solução do escoamento é de grande importância para a qualidade dos resultados numéricos. À medida que a malha é refinada, a solução numérica se aproxima da solução exata (desprezando-se os erros de truncamento do computador), mas o esforço computacional torna-se cada vez maior. Assim, a malha computacional ideal deve representar um bom compromisso entre a precisão da solução numérica e o tempo de processamento.

No escoamento em difusores radiais surgem gradientes elevados das propriedades junto às paredes sólidas e também na região de entrada do difusor. A malha deve ser suficientemente refinada nessas regiões para que tais gradientes sejam captados de forma precisa.

Devido à presença da palheta, o escoamento no orifício de passagem é defletido, desalinhando os vetores velocidade em relação à malha computacional na região de entrada do difusor. Decorrente disto, contribuições fisicamente inexistentes, de natureza essencialmente numérica e denominadas difusão numérica, são adicionadas ao transporte das variáveis. Maliska (1994d) define a difusão numérica como sendo “erros de truncamento de natureza dissipativa, associados à aproximação dos termos advectivos por esquemas dissipativos, causados pelo fato da função de interpolação não ser exata”. A difusão numérica pode ser reduzida pelo refino da malha, pelo uso de esquemas de interpolação mais precisos e também pelo alinhamento da malha com o vetor velocidade. Deschamps (1987) apresenta um estudo dos níveis de difusão numérica para o escoamento laminar em difusores radiais com discos paralelos, indicando que os mesmos são muito elevados na entrada do difusor. A razão disto advém do fato de que em tal região o

vetor velocidade é bem inclinado em relação à malha computacional e possui magnitude elevada devido à proximidade dos discos nas faixas de afastamentos testadas ($0,01 < s/d < 0,05$).

No presente trabalho adotou-se o refino da malha e o uso do esquema de interpolação de segunda ordem QUICK como técnicas para reduzir os erros de truncamento. No entanto, para as equações das grandezas turbulentas k e ε , foi adotado o esquema PLDS de Patankar (1980), devido a problemas de instabilidade numérica que podem ser ocasionados na solução de tais equações com o esquema QUICK. Possamai (1994) apresenta uma análise comparativa da precisão dos esquemas de interpolação PLDS e QUICK aplicada a difusores radiais, concluindo que o último permite uma maior economia computacional em função de seu menor erro de truncamento.

As Figuras 5.24 e 5.25 mostram testes para a avaliação de erros de truncamento nos resultados de distribuição de pressão adimensional P^* sobre a palheta, a partir do refino da malha computacional. Todos os testes foram realizados para a condição de escoamento $s_c/d=0,05$, $Re=25.000$, em duas condições de inclinação do disco frontal $\alpha = 0^\circ$ e 1° . Inicialmente, a condição de discos paralelos foi considerada, uma vez que, para esta situação bidimensional de escoamento, o refino de malha nas direções axial (η) e radial (r) pode ser explorado de forma mais completa. Os resultados produzidos por três malhas (70×80 , 140×160 e 280×320 , direções axial e radial, respectivamente) mostrados na Figura 5.24, demonstram que a malha menos refinada apresenta algum erro de truncamento (aproximadamente 14%), especialmente na região de estagnação do escoamento ($r/d < 0,5$). No entanto, tendo em vista as simulações do escoamento tridimensional a serem realizadas, decidiu-se que a diferença entre os resultados não justificava o custo computacional muito mais elevado associado às malhas mais refinadas. Tendo sido decidida a malha computacional no plano $\eta \times r$, a próxima investigação considerou a direção circunferencial θ . A Figura 5.25 mostra que praticamente não há diferença entre os resultados de distribuição de pressão quando a malha é duplicada naquela direção. Portanto, para o restante das simulações neste trabalho, adotou-se uma malha computacional com o refino de $70 \times 80 \times 8$ (direções η , r e θ , respectivamente). A Figura 5.26 apresenta uma vista ampliada da malha adotada no plano $\eta \times r$ para a região de entrada do difusor.

5.5.2 Comprimento do Orifício de Passagem

O comprimento do orifício de passagem foi outro fator que mereceu atenção na simulação numérica. A Figura 5.27 apresenta uma comparação entre as distribuições de pressão P^* obtidas considerando os comprimentos adimensionais do orifício de passagem, $L (= e/d)$, iguais a 1 e 3. Percebe-se da figura que a distribuição de pressão apresenta uma variação mínima na região de estagnação, quando o comprimento adimensional muda de 1 para 3. Este resultado concorda com as conclusões obtidas por Deschamps et al. (1987) na investigação do efeito do comprimento do orifício sobre o carregamento de pressão para o escoamento laminar.

Quando não dito em contrário, as simulações no restante do presente trabalho adotam um comprimento adimensional para o orifício de passagem igual a 1.

5.5.3 Condição de Contorno na Entrada do Orifício de Passagem

Para pequenos afastamentos entre os discos, Ferreira et al. (1988) identificaram que o escoamento experimenta uma elevada aceleração à medida que se aproxima da entrada do difusor, ocasionada pela grande redução da área de passagem. Devido a esta característica do escoamento, o perfil de velocidade na entrada do orifício de passagem não tem praticamente influência sobre a solução numérica no difusor. Neste trabalho foram verificadas as distribuições de pressão sobre a palheta, obtidas considerando os perfis uniforme e parabólico de velocidade na entrada da válvula, que correspondem a dois limites de escoamento plenamente desenvolvido em uma canalização. Conforme mostrado na Figura 5.28, a solução não sofre uma variação muito grande quando se introduz tamanha alteração nos perfis de velocidade. Portanto, a condição de escoamento uniforme foi adotada para a entrada do orifício de passagem no restante das simulações.

Embora nenhuma informação para a energia cinética do movimento turbulento esteja também disponível, testes numéricos (Deschamps et al., 1996) revelaram que quando o nível da intensidade da turbulência, I , é modificado de 3% para 6%, não ocorre variação significativa na solução numérica do escoamento. Um valor de 3% para a intensidade da turbulência foi adotado para todas as simulações neste trabalho.

5.5.4 Comparação com Resultados Experimentais

Como última etapa da validação da solução numérica foi realizada uma série de simulações para diferentes condições de escoamento. Os resultados obtidos nas simulações foram então comparados com dados experimentais de distribuição de pressão adimensional P^* na palheta obtidos por Deschamps et al. (1999), os quais possuem uma incerteza de 5%. Os resultados numéricos foram obtidos usando o modelo RNG k- ϵ com a viscosidade efetiva definida como no modelo k- ϵ padrão (Modelo 2), uma vez que, como visto na seção 5.4, este modelo é o mais adequado para a previsão do escoamento em difusores radiais. As Figuras 5.29 e 5.30 mostram a comparação entre os resultados numéricos e os dados experimentais para as várias condições geométricas de escoamento, mas mantendo-se em todas elas $Re = 25.000$ e $D/d = 1,66$.

Para a condição de relação de diâmetros $D/d = 1,66$, afastamento adimensional $s_c/d = 0,05$ e ângulos de inclinação da palheta, $\alpha = 0^\circ$ e 1° , conforme a Figura 5.29, verifica-se uma boa concordância entre os resultados. Também para a condição de afastamento maior, $s_c/d = 0,07$, os resultados numéricos comparam bem com as medições (Figura 5.30).

As comparações realizadas para a relação de diâmetros $D/d = 3$, apresentadas na Figura 5.31 para $s_c/d = 0,05$ e na Figura 5.32 para $s_c/d = 0,07$ mostram um nível de concordância satisfatório, mas não tão bom quanto o verificado para a relação $D/d = 1,66$.

Deve ser mencionado que a inclinação máxima que pode ser analisada é função do afastamento e da relação de diâmetros D/d . Para a relação $D/d = 3$ e afastamento $s_c/d = 0,07$ isto significa um ângulo α em torno de 2° .

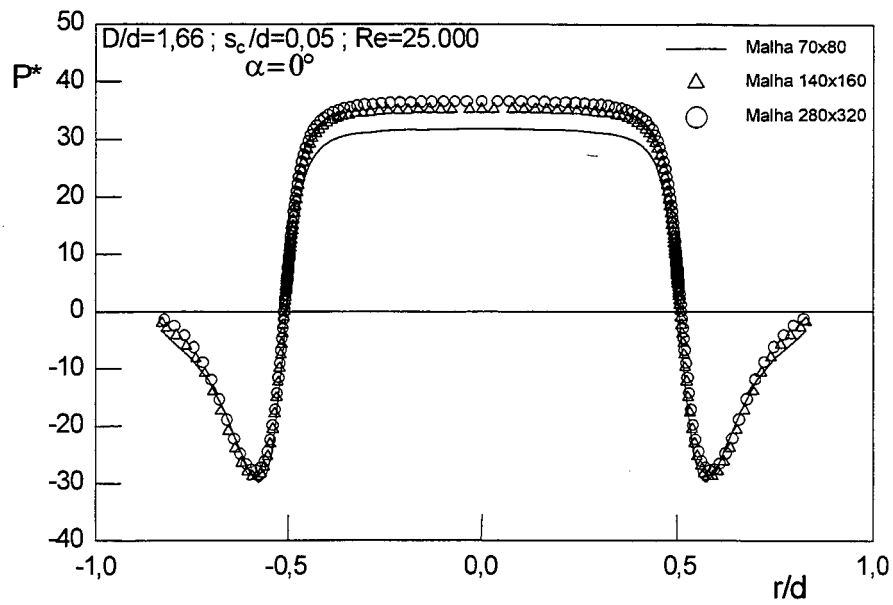


Figura 5.24: Sensibilidade da solução numérica ao refino da malha no plano $\eta \times r$.

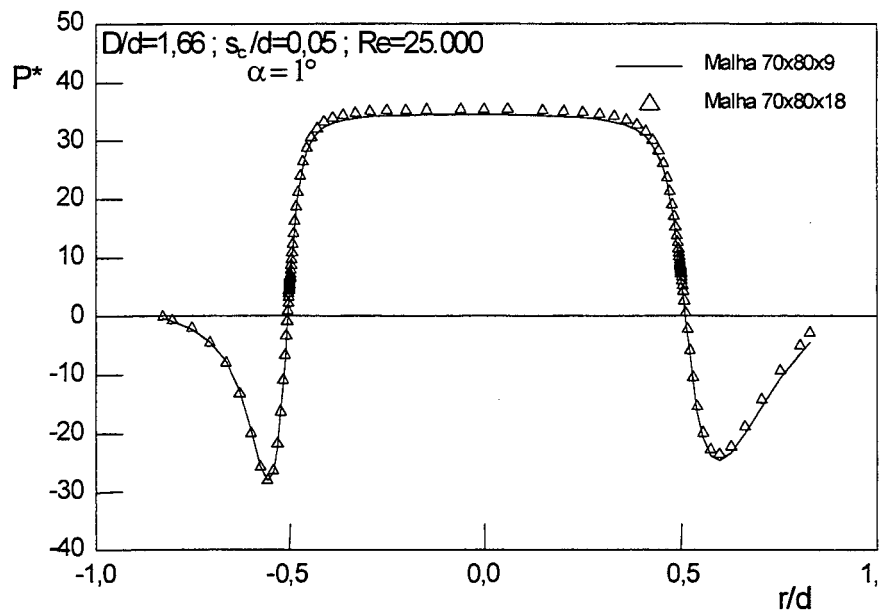


Figura 5.25: Sensibilidade da solução numérica ao refino da malha no plano $r \times \theta$.

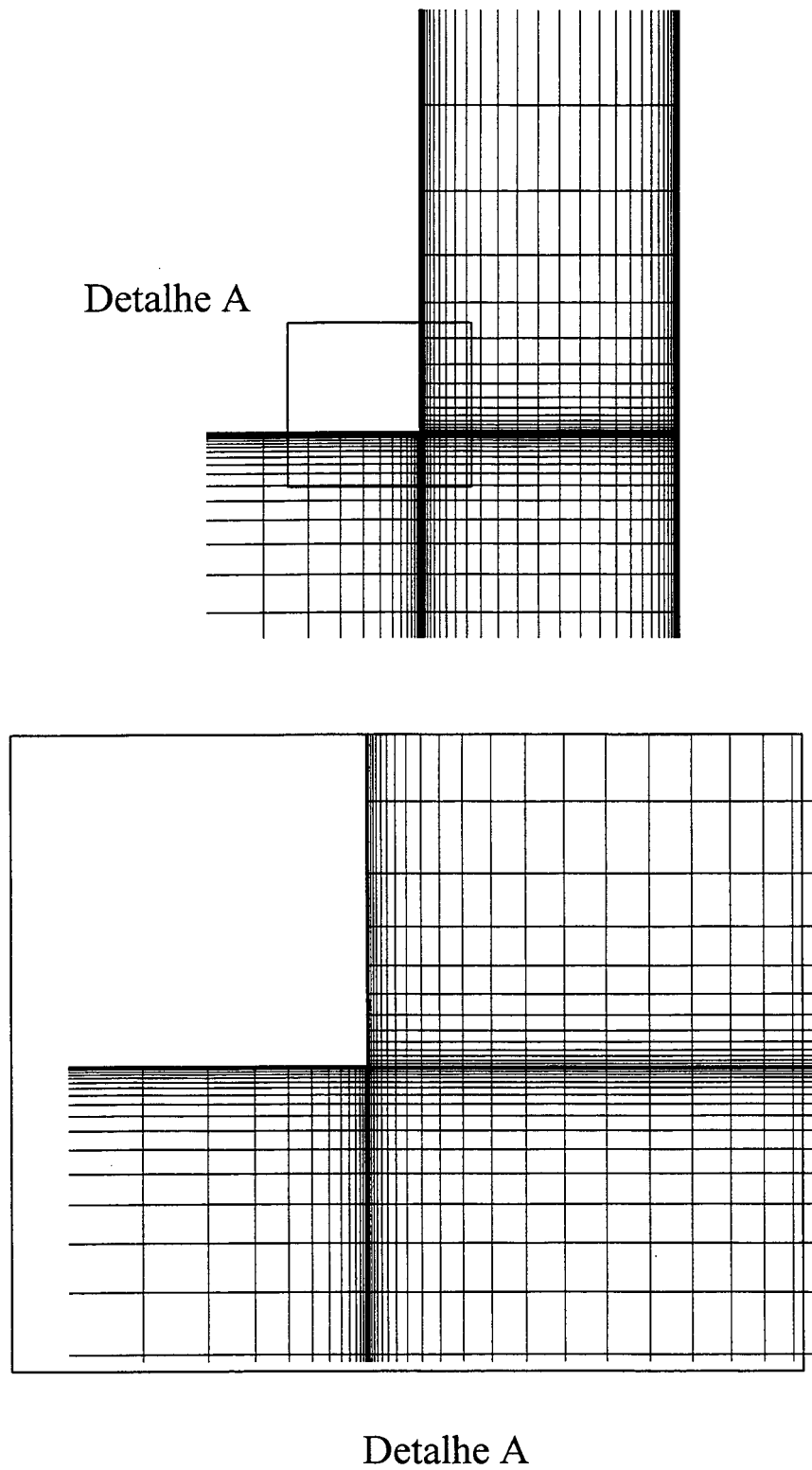


Figura 5.26: Malha computacional no plano $\eta \times r$.

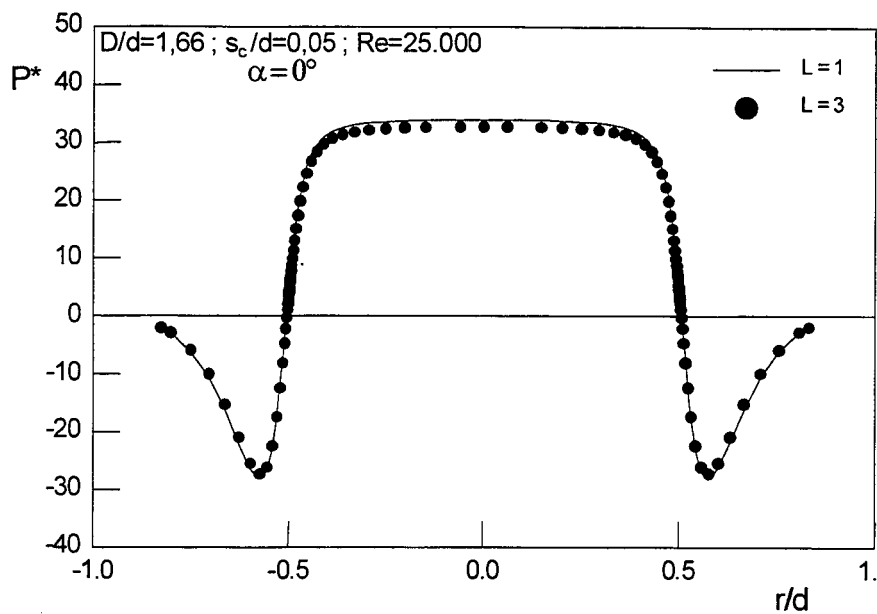


Figura 5.27: Influência do comprimento do orifício de passagem sobre a distribuição de pressão na palheta

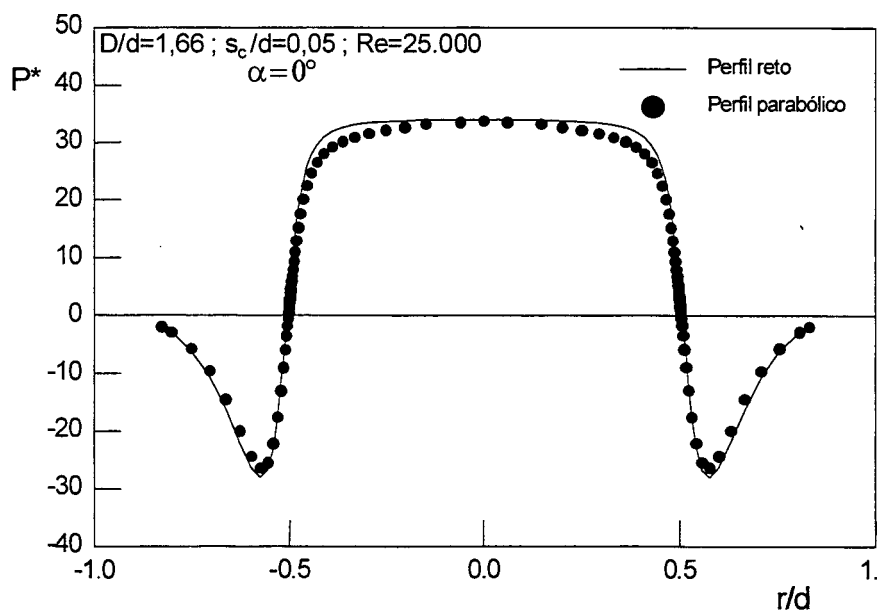


Figura 5.28: Influência do perfil de velocidade na entrada sobre a distribuição de pressão na palheta.

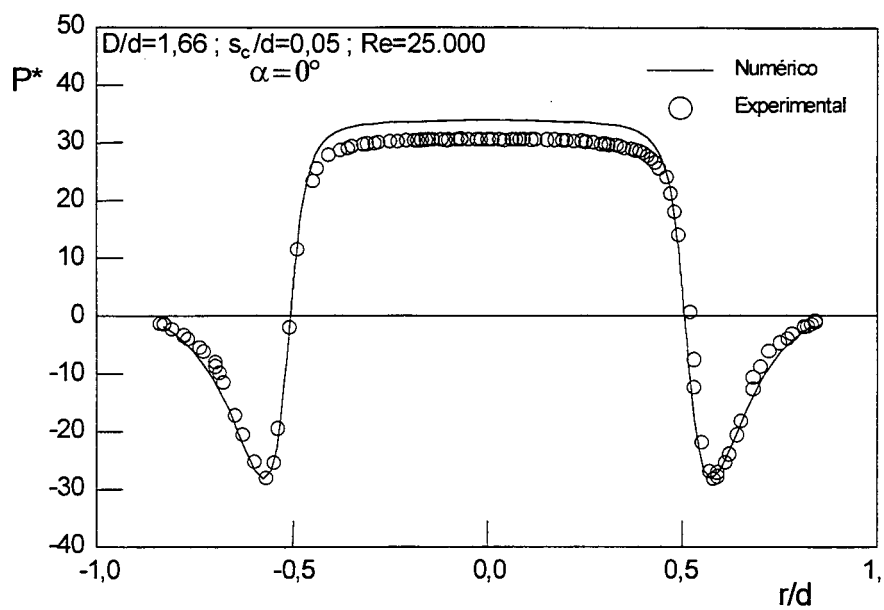
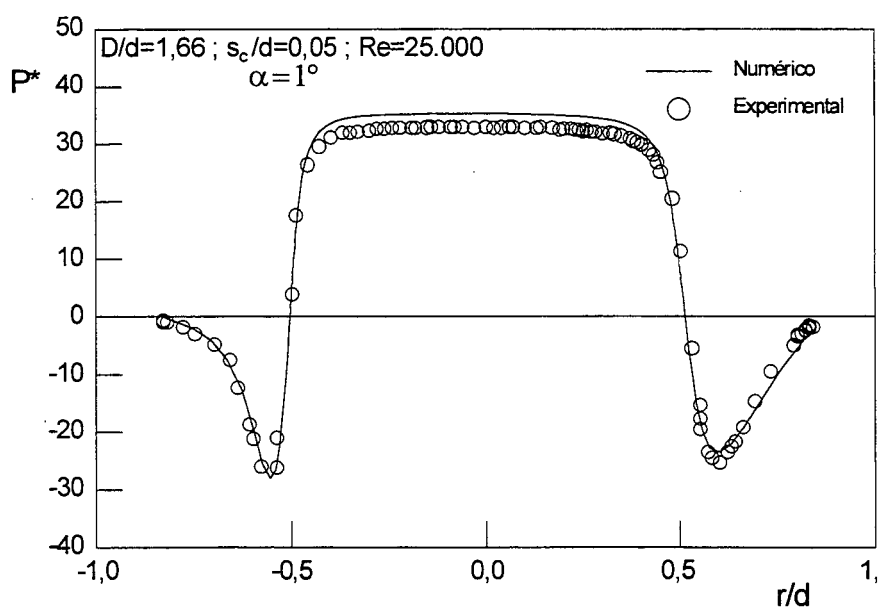
(a) $\alpha = 0^\circ$ (b) $\alpha = 1^\circ$

Figura 5.29: Resultados numéricos e experimentais para a distribuição de pressão sobre a palheta; $D/d = 1,66$; $s_c/d = 0,05$.

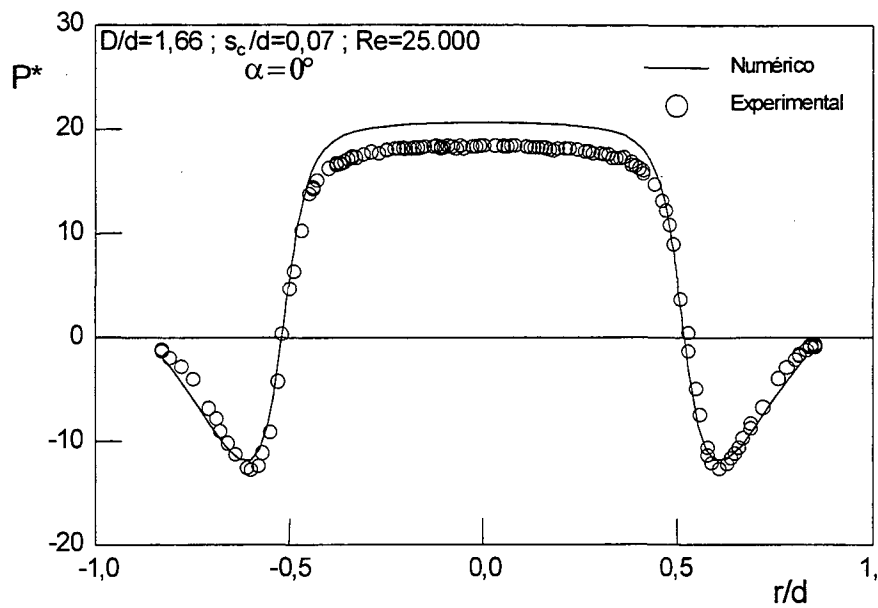
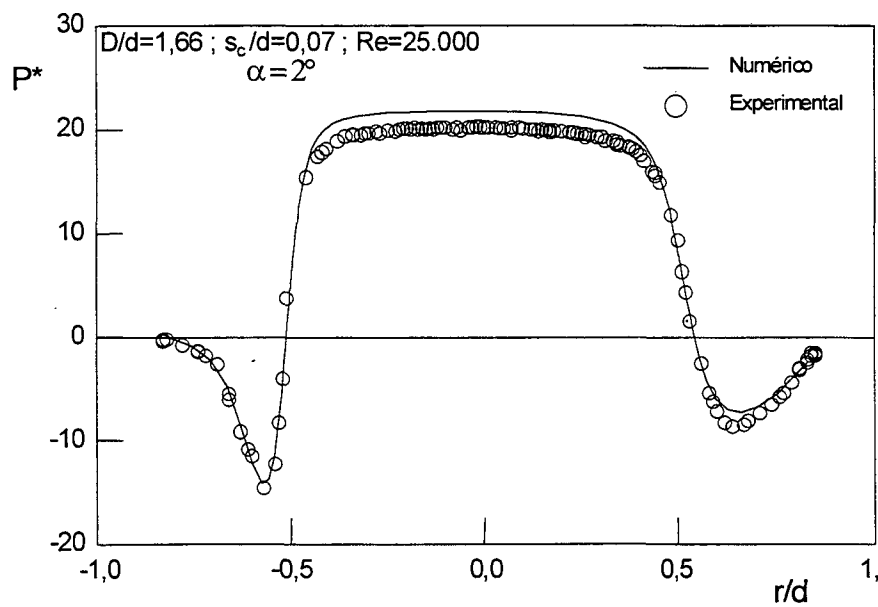
(a) $\alpha = 0^\circ$ (b) $\alpha = 2^\circ$

Figura 5.30: Resultados numéricos e experimentais para a distribuição de pressão sobre a palheta; $D/d = 1,66$; $s_c/d = 0,07$.

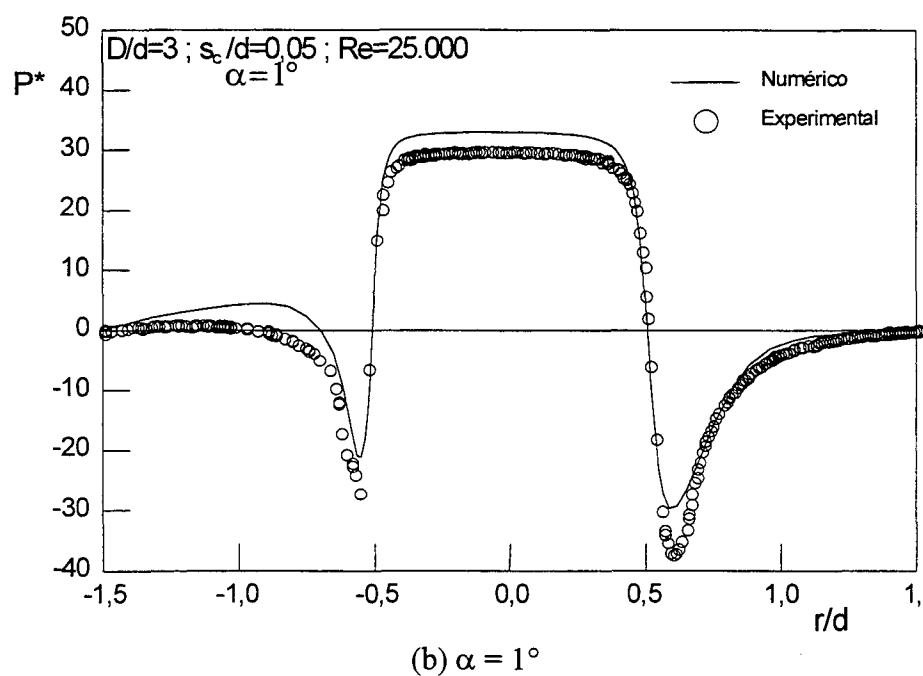
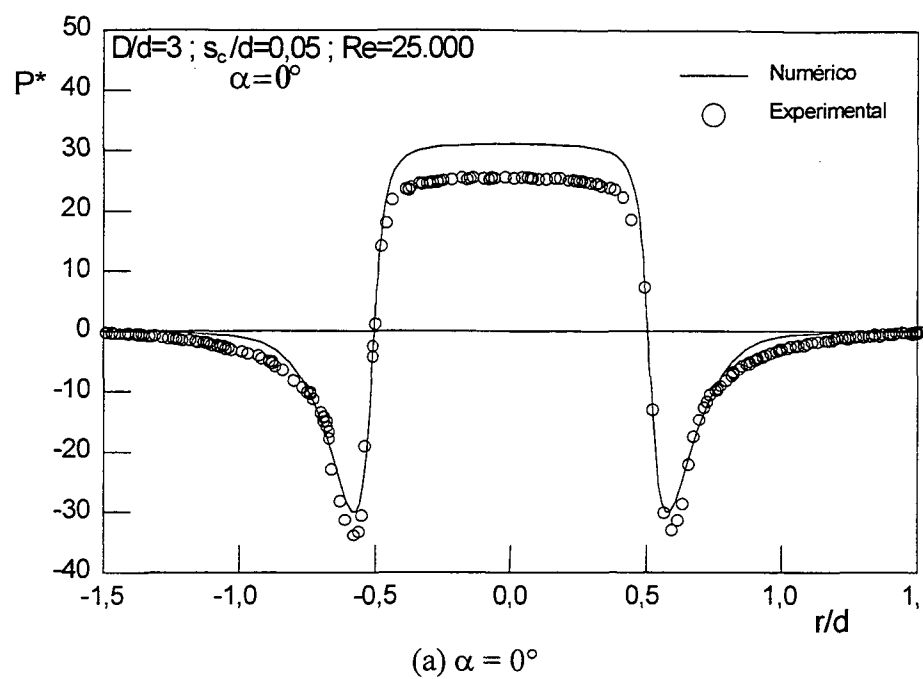


Figura 5.31: Resultados numéricos e experimentais para a distribuição de pressão sobre a palheta; $D/d = 3$; $s_c/d = 0,05$.

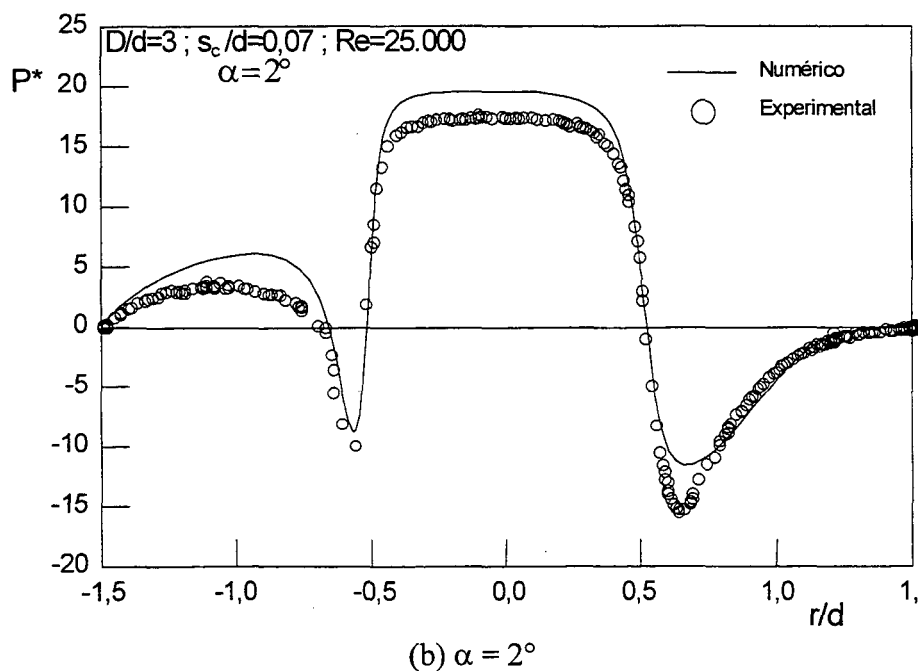
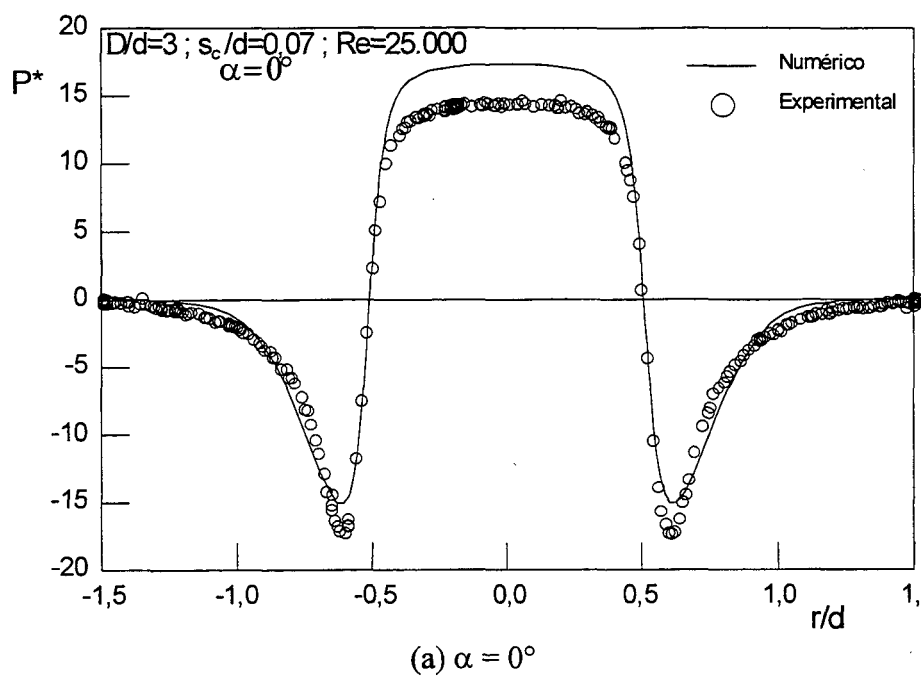


Figura 5.32: Resultados numéricos e experimentais para a distribuição de pressão sobre a palheta; $D/d = 3$; $s_c/d = 0,07$; $\alpha = 2^\circ$.

5.6 Resultados e Discussão

Na seção anterior foi realizada uma série de testes para a validação da solução numérica. Além das conclusões a respeito dos parâmetros da metodologia numérica a serem utilizados (tais como malha computacional e condições de contorno), verificou-se que o modelo de turbulência que melhor prevê o escoamento através do difusor é uma versão do modelo RNG k- ϵ adotada de Orzag e Yakhot (1986). Esta versão denotada Modelo 2 na seção 5.3 utiliza uma expressão para o cálculo da viscosidade turbulenta idêntica às dos demais modelos k- ϵ propostos na literatura e indicada pela equação (5.39). De posse das informações geradas até aqui, nesta seção procede-se uma análise detalhada da influência de parâmetros do escoamento (inclinação da palheta, relação diâmetros D/d , número de Reynolds, Re) sobre a distribuição de pressão no disco frontal (palheta). Para cada situação investigada são apresentados, além da distribuição de pressão sobre a palheta, resultados de isolinhas para intensidade da turbulência, escalas de comprimento da turbulência, tensões de Reynolds, viscosidades efetivas e vetores velocidade. Todas as propriedades foram plotadas na região da entrada do difusor, devido à sua importância no padrão do escoamento. No entanto, na análise do efeito da relação de diâmetros D/d sobre o escoamento, as propriedades foram também plotadas no orifício de passagem. Ao final da seção é verificada a influência da inclinação da palheta sobre a força resultante atuando sobre a sua superfície.

5.6.1 Distribuição de Pressão em Relação à Inclinação da Palheta

Para um mesmo número de Reynolds ($Re = 25.000$), as Figuras 5.33 e 5.34 mostram para as relações de diâmetro $D/d = 1,66$ e $3,0$, respectivamente, a sensibilidade da distribuição de pressão sobre a palheta em função de sua inclinação. Em todos os gráficos de pressão a serem apresentados, a orientação da inclinação da palheta é aquela ilustrada na Figura 5.2, ou seja, o lado esquerdo do gráfico corresponde à região do difusor onde os discos estão mais próximos.

O comportamento observado para a relação de diâmetros $D/d = 1,66$ pode ser melhor explicado através das Figuras 5.33(b) e (c), preparadas para os afastamentos $s_c/d = 0,05$ e $0,07$, respectivamente, e para as quais são traçadas distribuições de pressão para três ângulos α . Observa-se que com a inclinação, a área de passagem do escoamento diminui na região do difusor onde os discos estão mais próximos, aumentando a restrição ao escoamento e fazendo

com que a pressão de estagnação ali aumente levemente. A diminuição da área de passagem, por sua vez, aumenta a aceleração do escoamento, aumentando a queda de pressão na entrada do difusor. Na região de maior afastamento entre a palheta e o assento, a área de passagem é maior e isto torna a queda de pressão menos intensa devido à menor aceleração do escoamento. O comportamento descrito acima é mais evidente para a condição de maior afastamento $s_c/d = 0,07$, representado na Figura 5.33(c). Para o menor afastamento, $s_c/d = 0,03$, uma explicação diferente deve ser fornecida já que o efeito sobre a distribuição de pressão acontece ao contrário do explicado para os maiores afastamentos, ilustrados nas Figuras 5.33(b) e (c). Para esta situação, o afastamento muito pequeno já existente é diminuído ainda mais no lado esquerdo do difusor pela inclinação da palheta. A área de passagem torna-se então tão pequena que os efeitos viscosos provocado pela proximidade das paredes dificultam o escoamento, fazendo com que a maior parte do fluido escoe através da região de maior afastamento, aumentando lá a aceleração e, como consequência, trazendo uma queda de pressão maior na entrada do difusor.

Nas Figuras 5.34(a) e (b) é mostrada a influência da inclinação da palheta quando usada uma relação de diâmetros $D/d = 3$. O comportamento é um tanto diferente do apresentado para a relação de diâmetros $D/d = 1,66$. Devido ao maior diâmetro da palheta, para uma mesma inclinação α , a região de maior proximidade entre os discos provocará uma maior restrição ao escoamento para $D/d = 3$ do que para $D/d = 1,66$, fazendo com que as velocidades ali sejam baixas e a queda de pressão seja menor do que aquela que ocorre para $\alpha = 0^\circ$. Dependendo das inclinações e dos afastamentos considerados, observa-se na Figura 5.34(b) que o ponto de mínimo da distribuição de pressão, no lado onde as paredes do difusor estão mais afastadas, pode se deslocar para posições radiais r/d maiores e apresentar uma queda de pressão não tão abrupta. Este fenômeno se deve ao formato da região de recirculação que, embora maior, faz a menor área de passagem do escoamento ocorrer mais à jusante no difusor.

Para aumentar o entendimento do efeito da inclinação sobre o escoamento, e também complementar a discussão anterior sobre a distribuição de pressão, são apresentados nas Figuras 5.35 a 5.40 campos de propriedades do escoamento (vetores velocidade, pressão, escalas de comprimento, intensidade da turbulência e viscosidades efetiva) para a relação de diâmetros $D/d = 3$, número de Reynolds $Re = 25.000$ e duas condições de afastamentos:

i) $s_c/d = 0,05$; $\alpha = 0$ e 1°

ii) $s_c/d = 0,07$; $\alpha = 0$ e 2°

Inicialmente, na Figura 5.35 é mostrada a influência da inclinação da palheta sobre o campo de velocidade na entrada do difusor para as duas condições de afastamento referenciadas acima. Mesmo quando a inclinação da palheta é nula, observa-se claramente a presença de uma região de recirculação. Com a inclinação, a recirculação torna-se maior na região onde as paredes do difusor estão mais afastadas, devido justamente ao maior espaço entre palheta e assento, que permite os efeitos de inércia se manifestarem de forma mais intensa. O contrário acontece na região de menor afastamento entre as paredes da palheta e do assento, provocando a diminuição da região de recirculação. O exame das Figuras 5.35(a) e (b) mostra que o efeito da inclinação sobre os vetores velocidade, em dois afastamentos distintos, é bem similar. Como esperado, a maior região de recirculação ocorre para a situação onde as paredes do difusor estão mais afastadas. Os campos de pressão correspondentes aos campos de velocidade mostrados na Figura 5.35 são apresentados na Figura 5.36. De forma geral, observa-se que, com a inclinação da palheta, as pressões diminuem na região de maior afastamento e vice-versa. Este comportamento já foi analisado através das distribuições de pressão das Figuras 5.34(a) e (b).

A Figura 5.37 considera as escalas de comprimento, $L (= \ell/d)$, onde observa-se que seus valores aumentam na região onde as paredes tornam-se mais afastadas pela inclinação da palheta, e diminuem onde este afastamento é menor. Deve ser notado que a variação das escalas de comprimento é muito mais intensa na região onde as paredes ficam mais próximas, estando esta variação, relacionada com a diminuição da região de recirculação bem como dos níveis de velocidade. Este comportamento é comum às duas situações de afastamentos das Figuras 5.37(a) e (b).

A influência da inclinação da palheta sobre a intensidade da turbulência, $I [(= (2k/3)^{1/2} / \bar{U}_{in})]$, é mostrada na Figura 5.38. Independente da inclinação, a região de intensidade máxima do escoamento acontece dentro do difusor junto ao assento, onde elevadas taxas de deformação são geradas pelas regiões de recirculação indicadas na Figura 5.35. Observa-se que quando a palheta é inclinada, a intensidade aumenta na região onde as paredes ficam mais afastadas e diminui onde as paredes ficam mais próximas. Novamente, do mesmo modo como para as escalas de comprimento, este comportamento está relacionado à variação das regiões de recirculação na entrada do difusor. Comparando as Figuras 5.38(a) e (b) verifica-se que com o aumento do afastamento entre a palheta e o assento, s_c/d , a intensidade da turbulência diminui.

Isto ocorre devido aos menores níveis de velocidade que passam a acontecer no difusor, já que a área de passagem é aumentada, implicando em menores taxas de deformação. A consequência da inclinação da palheta sobre as tensões de Reynolds, ilustrada na Figura 5.39, segue basicamente as mesmas idéias apresentadas na discussão para a intensidade da turbulência.

Finalmente, a influência da inclinação da palheta sobre a viscosidade efetiva $\mu_e^* (= \mu^* + \mu_t^*)$ é mostrada na Figura 5.40. Os campos mostram que μ_e^* é aumentada na região do difusor onde as paredes ficam mais afastadas pela inclinação da palheta, e vice-versa. A consequência do afastamento entre a palheta e o assento ($s_c/d = 0,05$ e $0,07$) nas Figuras 5.40(a) e (b) não é tão clara, uma vez que a intensidade da turbulência e a escala de comprimento sofrem efeitos contrários pelo aumento do afastamento e, no entanto, são diretamente proporcionais à viscosidade turbulenta.

Dos resultados analisados acima pode-se concluir que a influência da inclinação da palheta sobre os campos de propriedades do escoamento é bem significativa. De forma geral, para as grandezas turbulentas o efeito é no sentido de aumentar os seus níveis na região do difusor onde as paredes tornam-se mais afastadas e de diminuir onde as paredes ficam mais próximas.

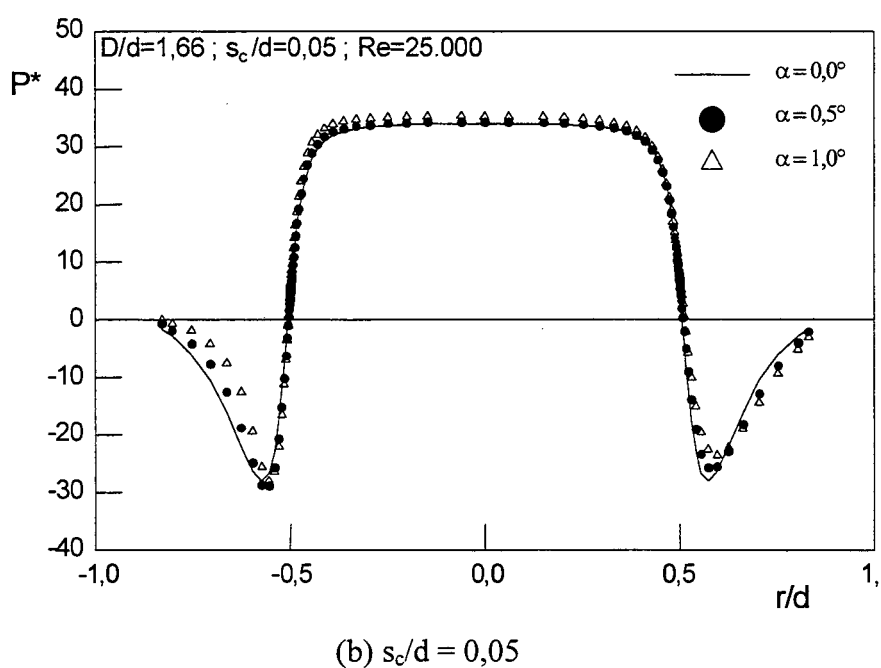
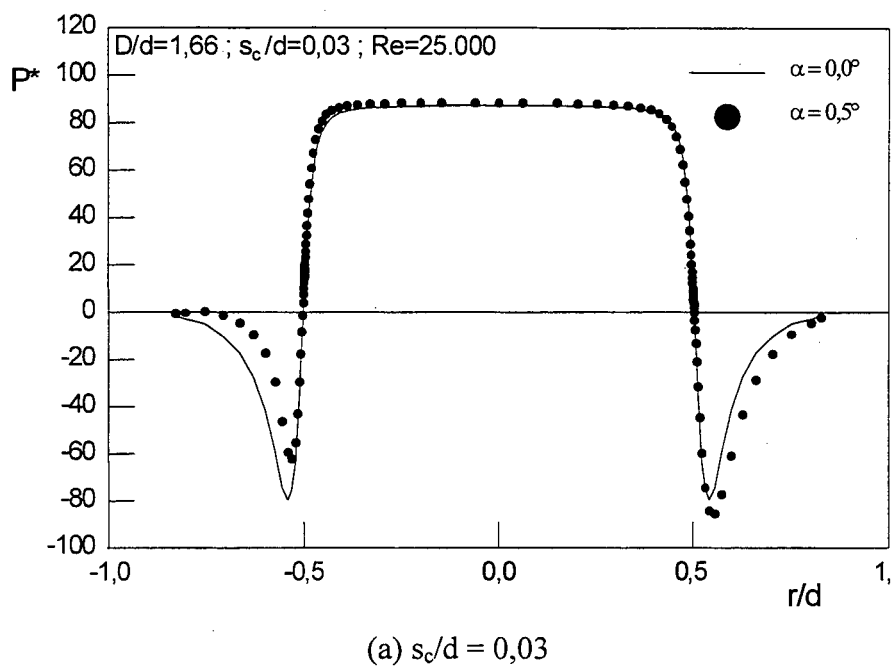


Figura 5.33: Influência da inclinação da palheta sobre a distribuição de pressão;
 $D/d = 1,66$ e $Re = 25.000$.

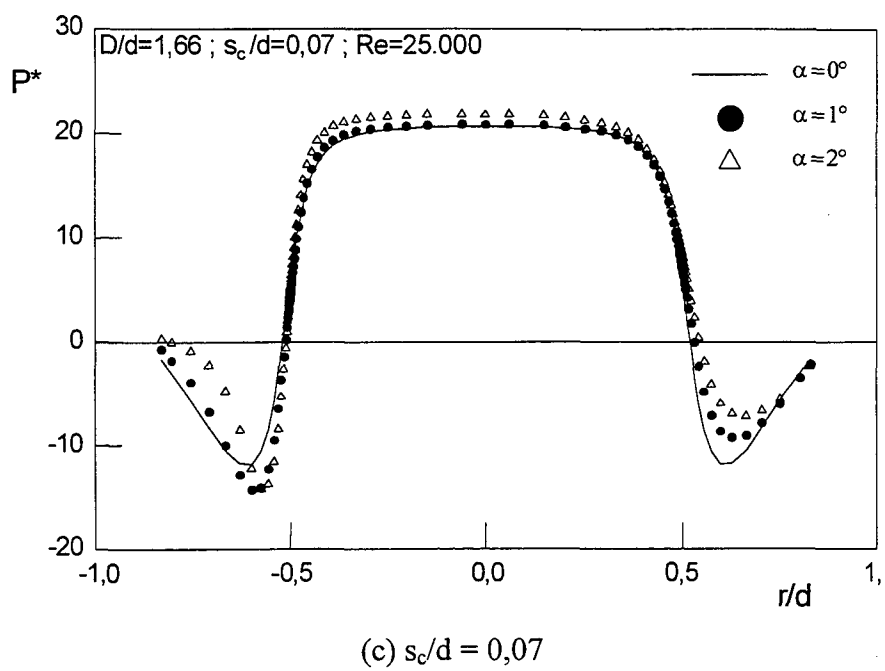


Figura 5.33: (continuação).

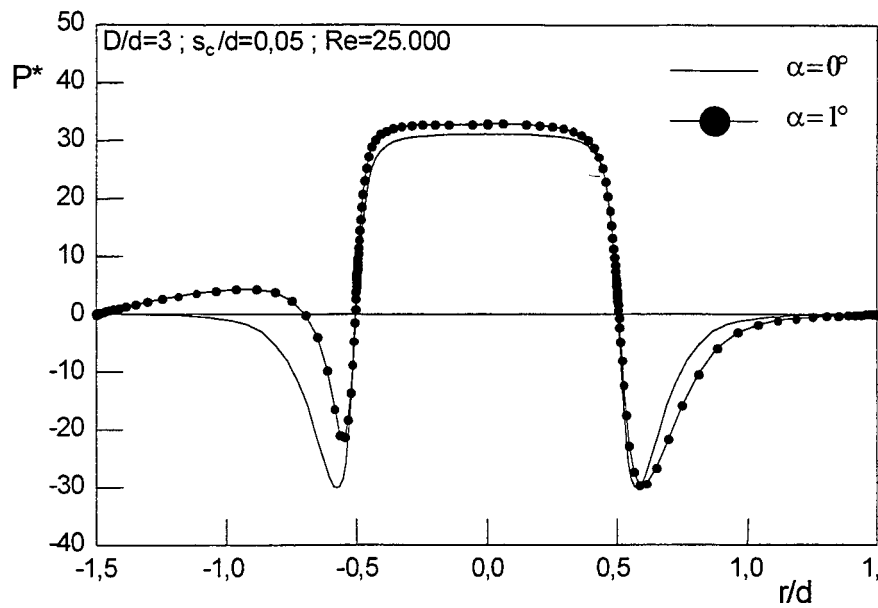
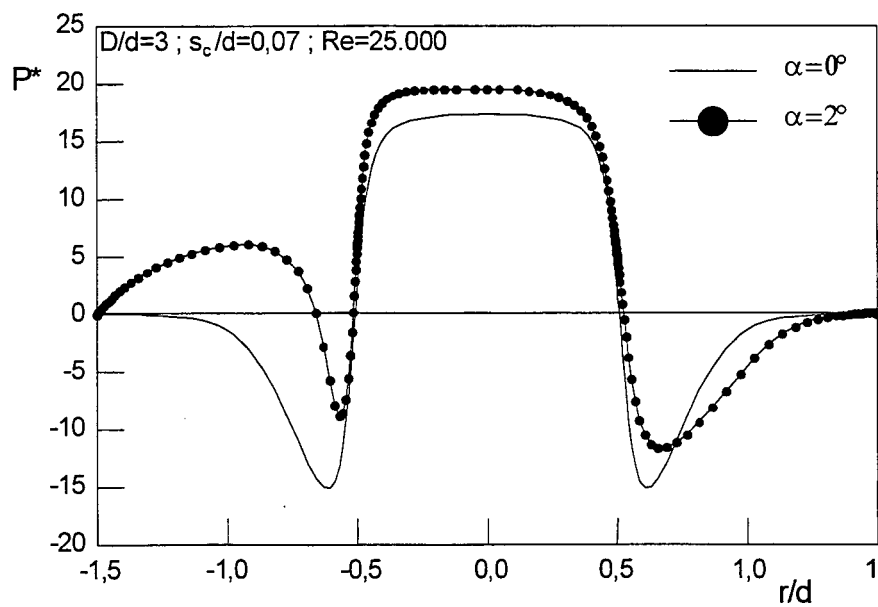
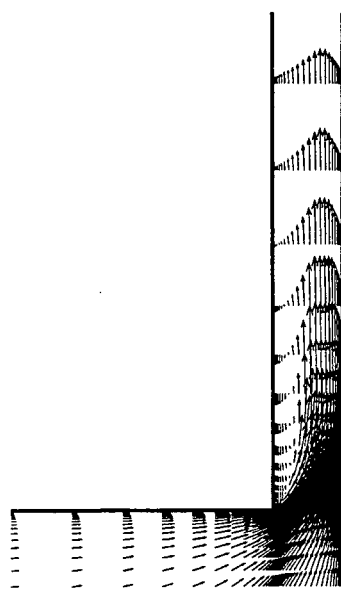
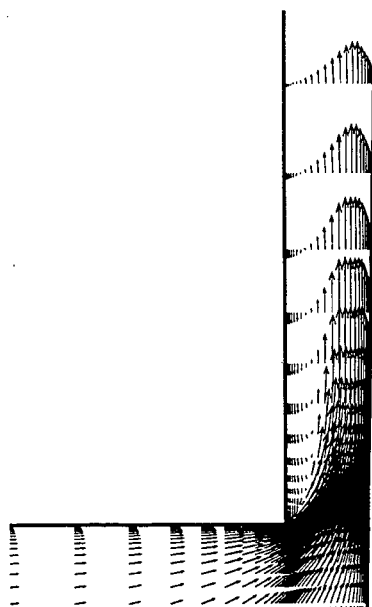
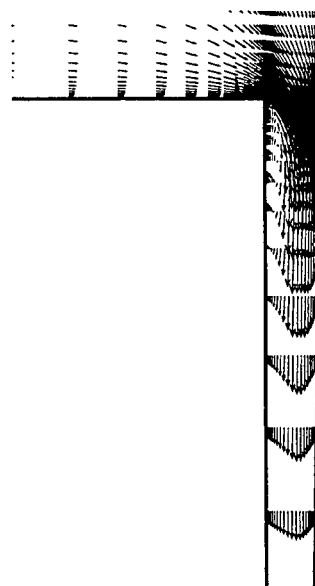
(a) $s_c/d = 0,05$ (b) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.34: Influência da inclinação da palheta sobre a distribuição de pressão;
 $D/d = 3,0$ e $Re = 25.000$.

 $\alpha = 0^\circ$ 

(região com paredes mais afastadas)



(região com paredes mais próximas)

 $\alpha = 1^\circ$ (a) $s_c/d = 0,05$

Figura 5.35: Influência da inclinação da palheta sobre as velocidades;

 $D/d = 3$ e $Re = 25.000$.

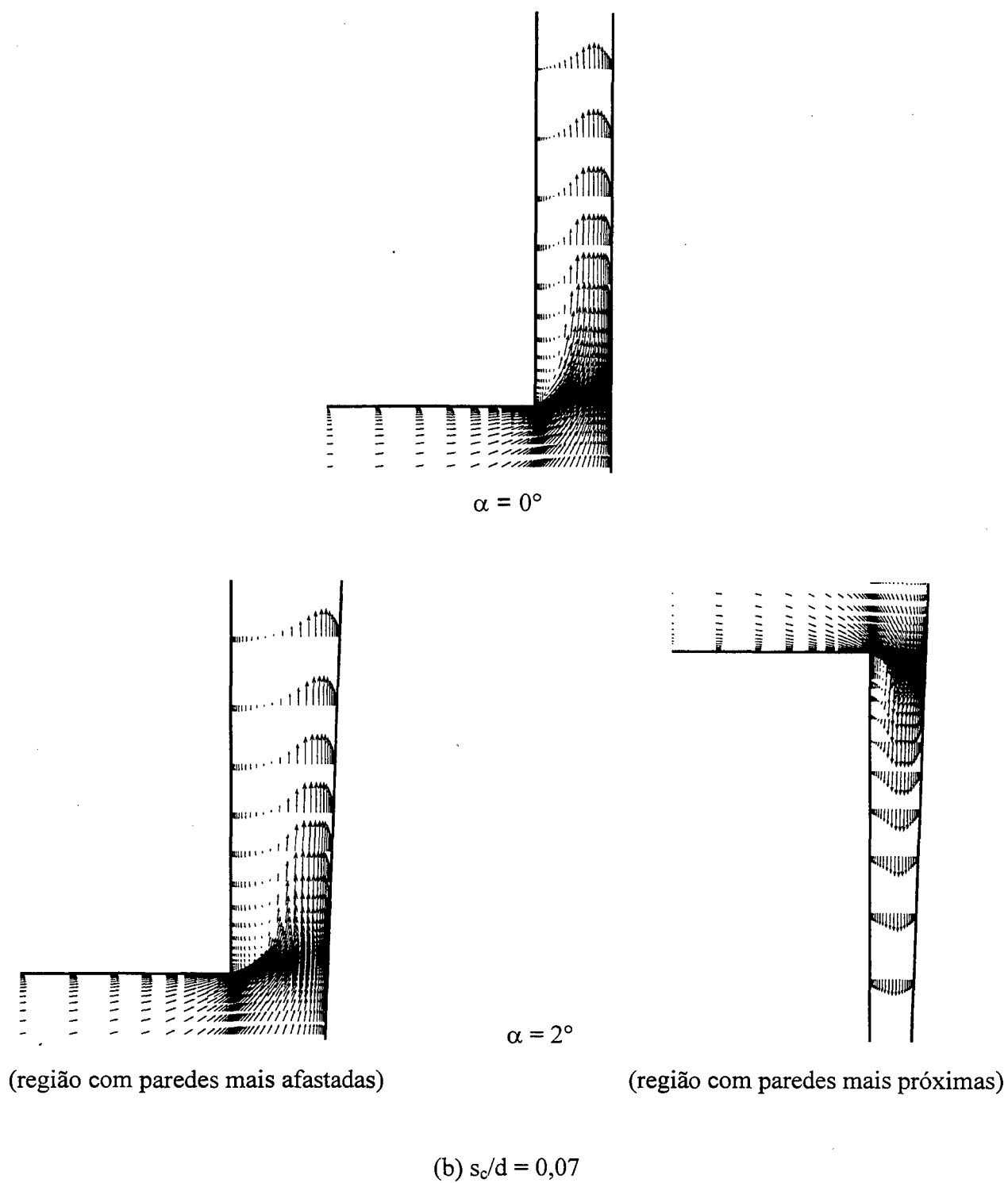
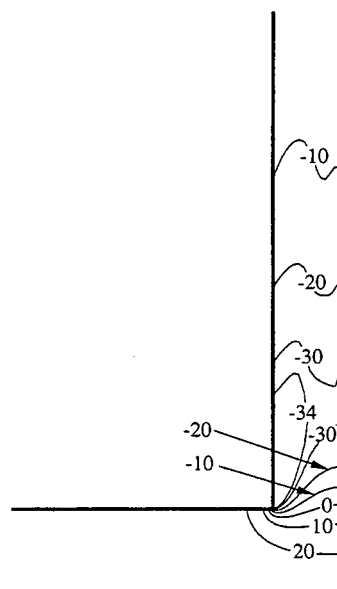
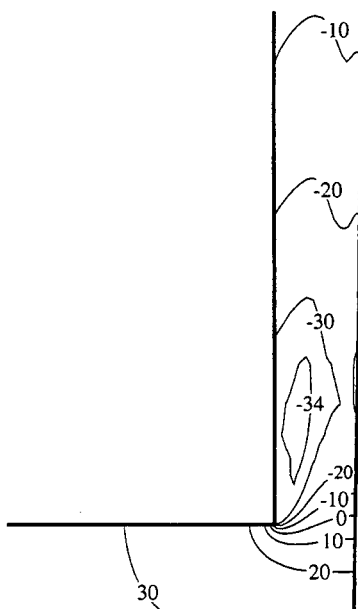
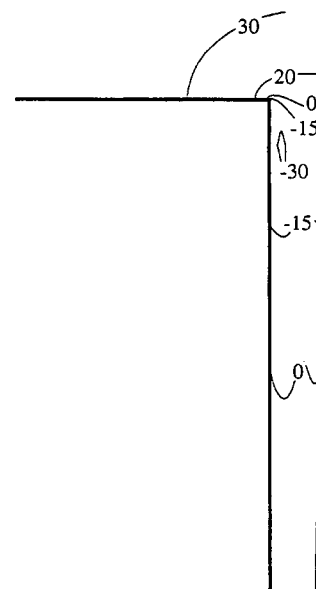


Figura 5.35: (continuação).


 $\alpha = 0^\circ$


(região com paredes mais afastadas)

 $\alpha = 1^\circ$


(região com paredes mais próximas)

 (a) $s_c/d = 0,05$

Figura 5.36: Influência da inclinação da palheta sobre o campo de pressão;

 $D/d = 3$ e $Re = 25.000$.

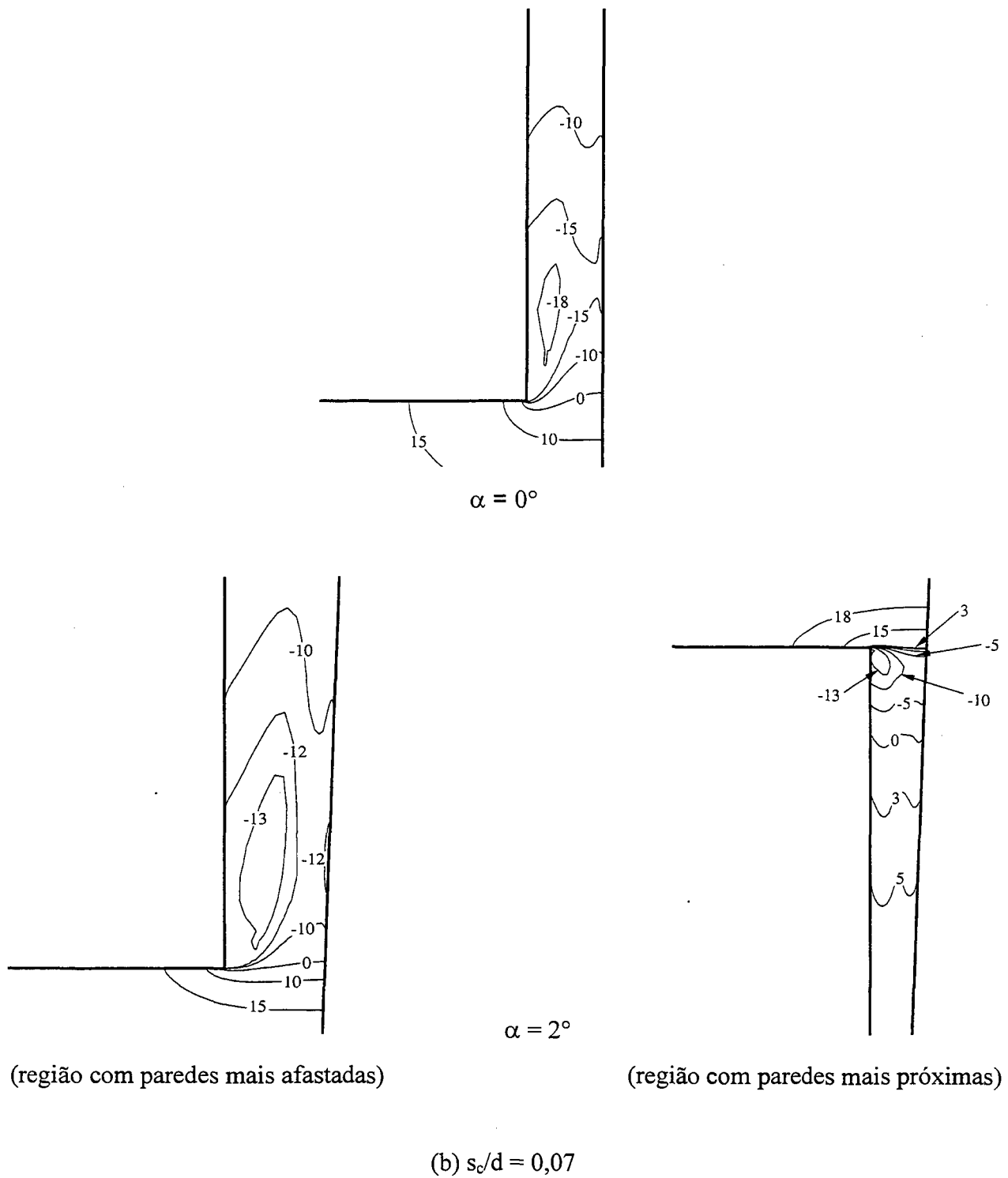


Figura 5.36: (continuação).

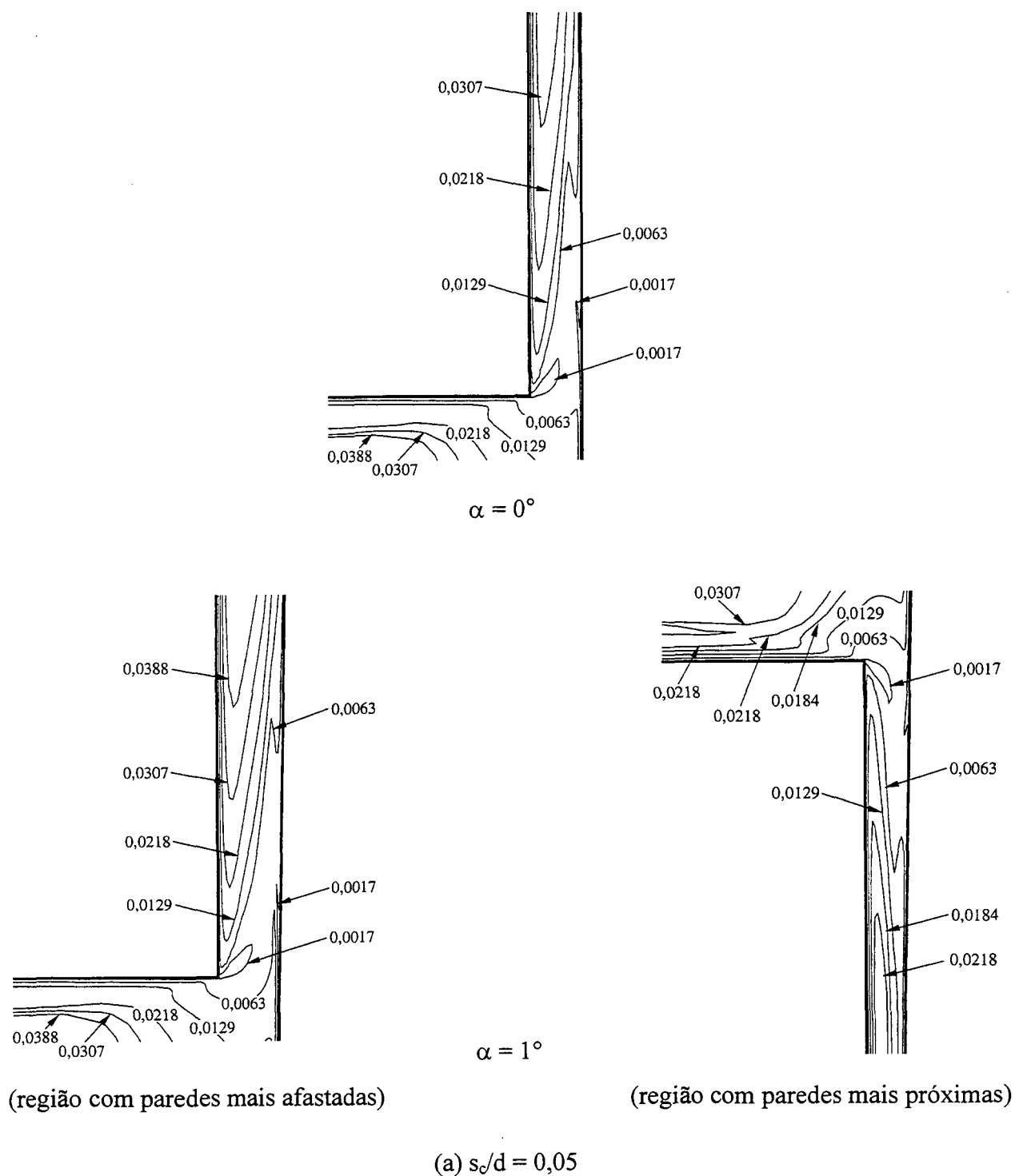


Figura 5.37: Influência da inclinação palheta sobre as escalas de comprimento, $D/d = 3$ e $Re = 25.000$.

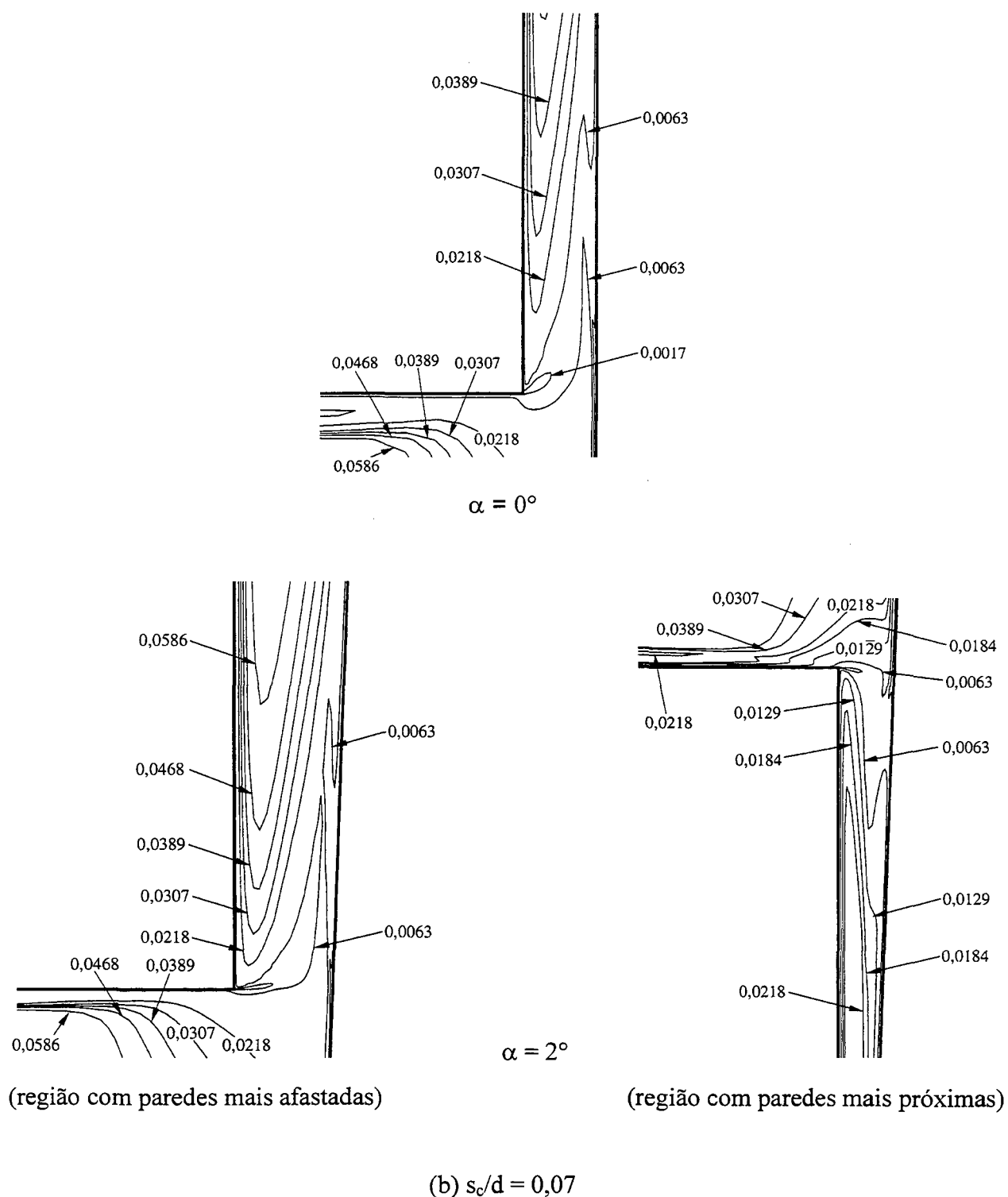


Figura 5.37: (continuação).

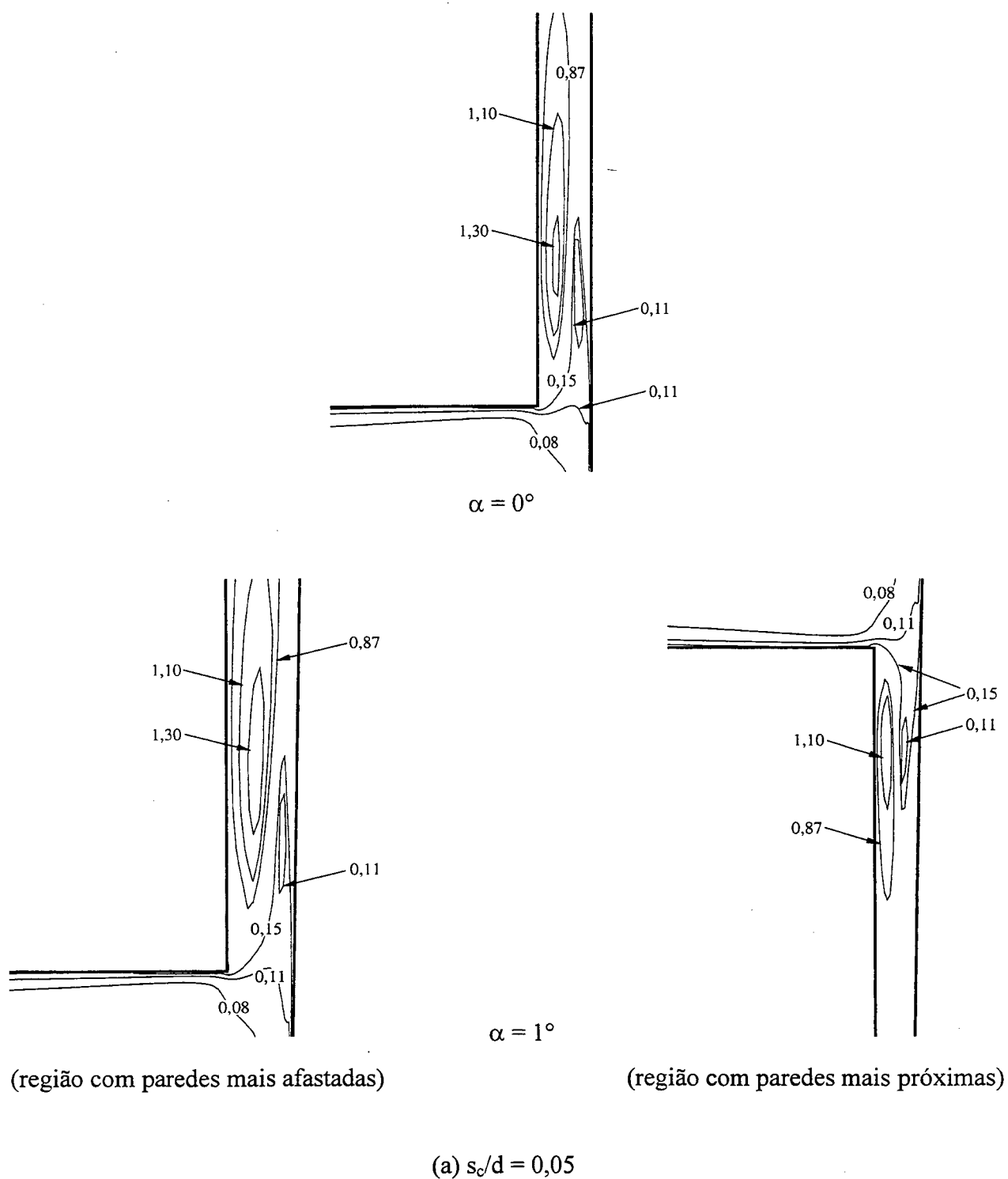


Figura 5.38: Influência da inclinação palheta sobre a intensidade da turbulência;
 $D/d = 3$ e $Re = 25.000$.

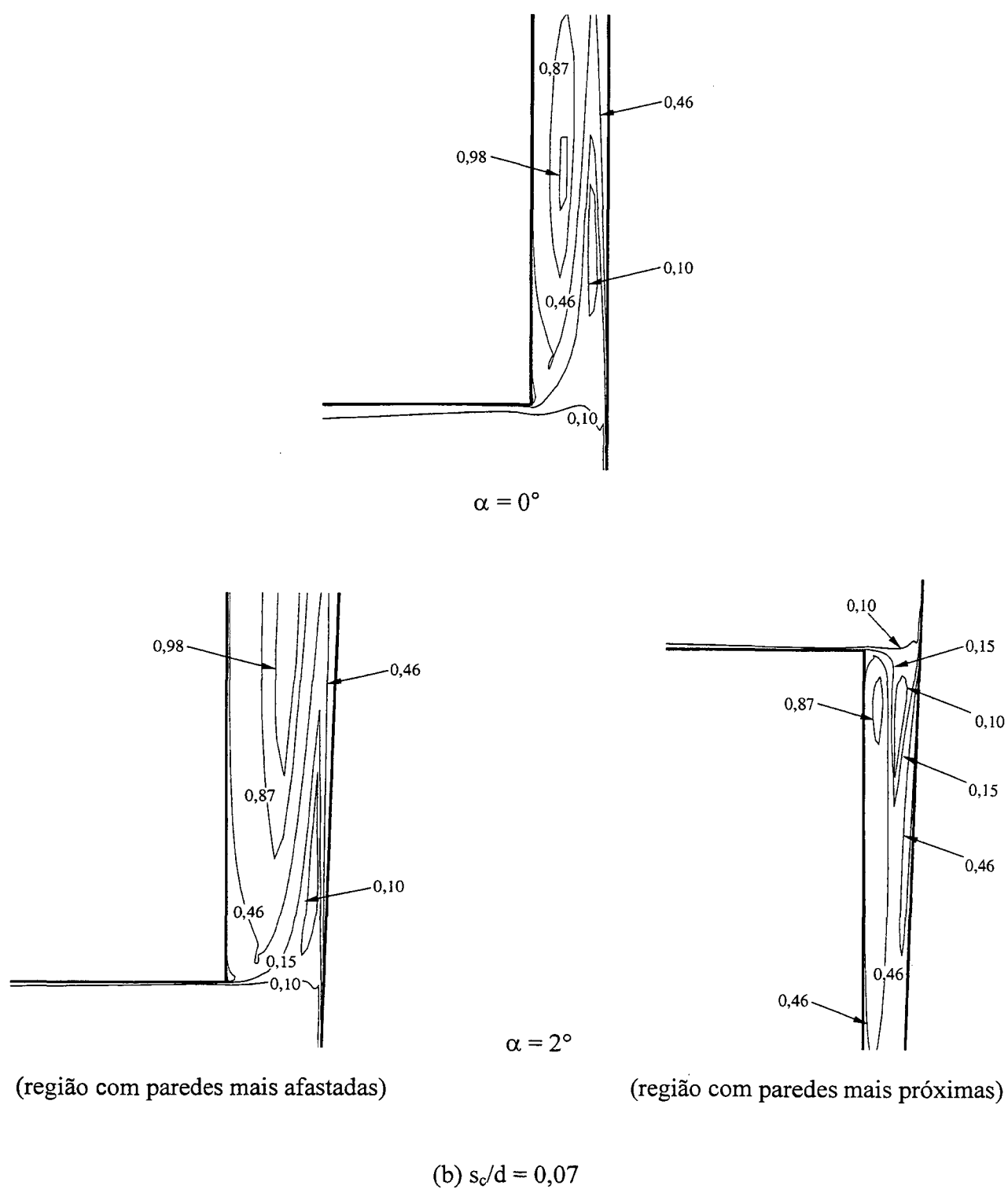


Figura 5.38: (continuação).

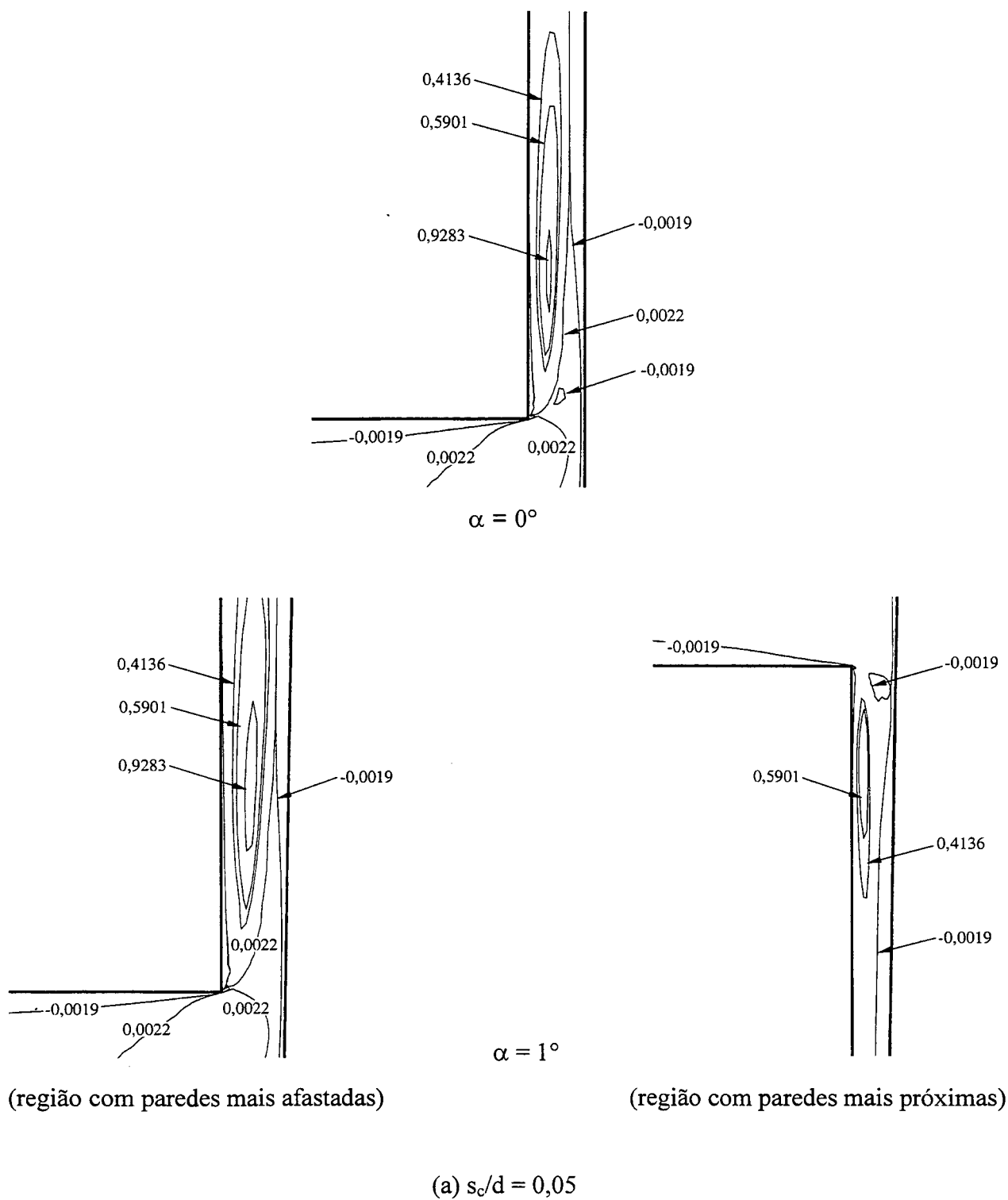


Figura 5.39: Influência da inclinação palheta sobre as tensões de Reynolds,
 $D/d = 3$ e $Re = 25.000$.

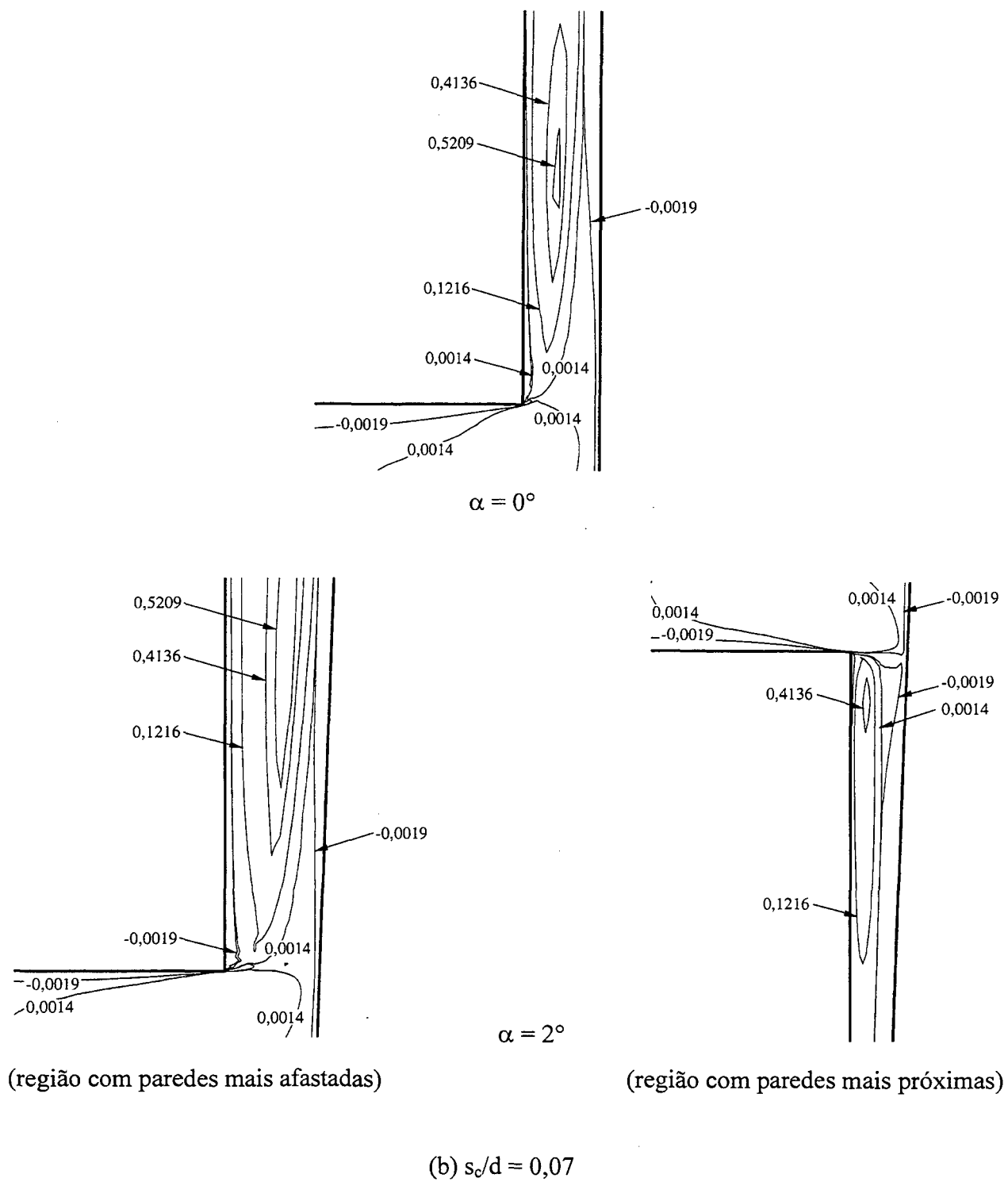


Figura 5.39: (continuação).

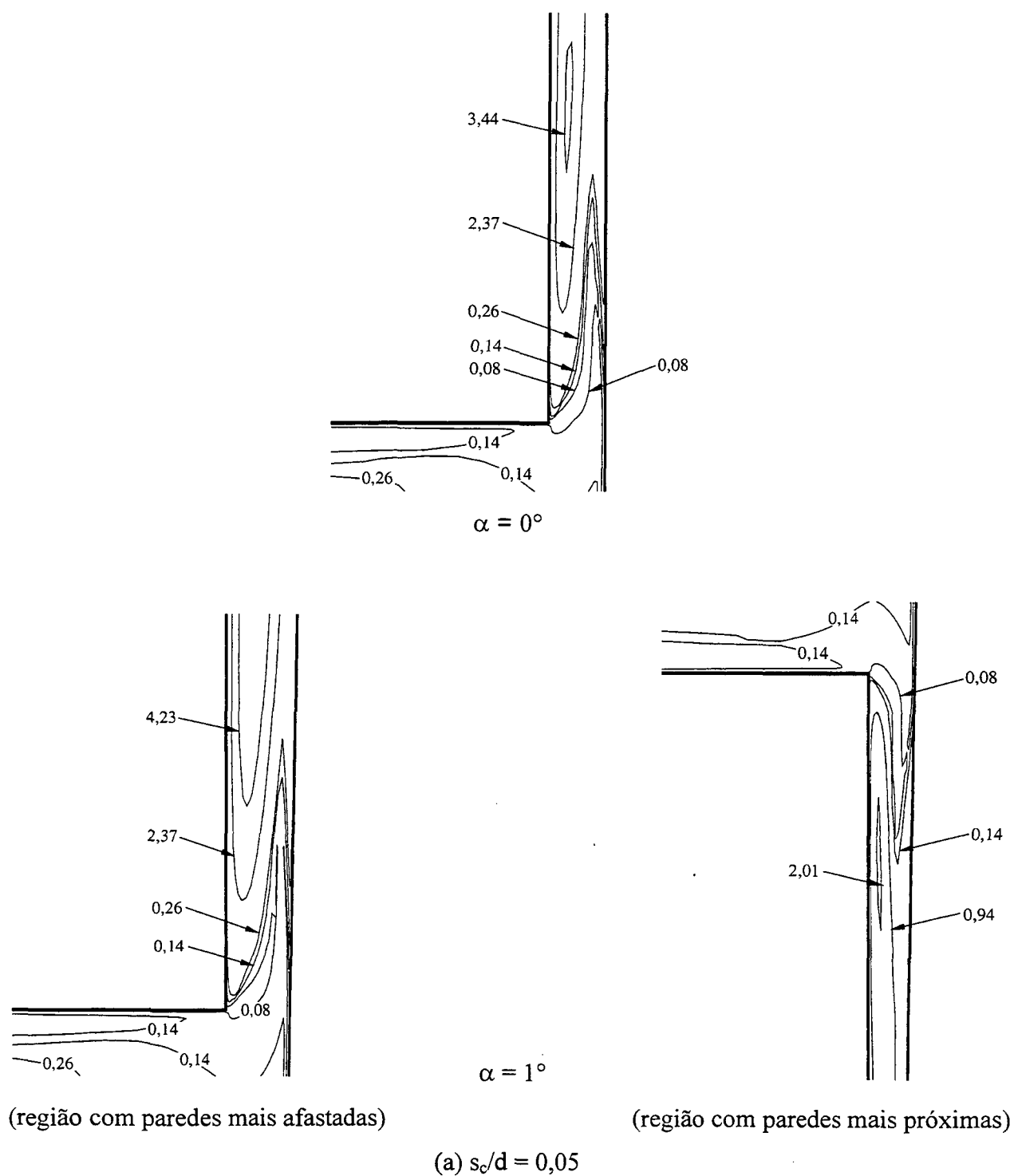
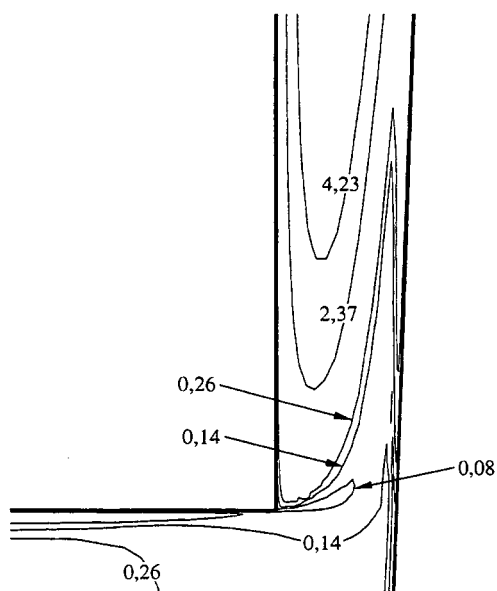
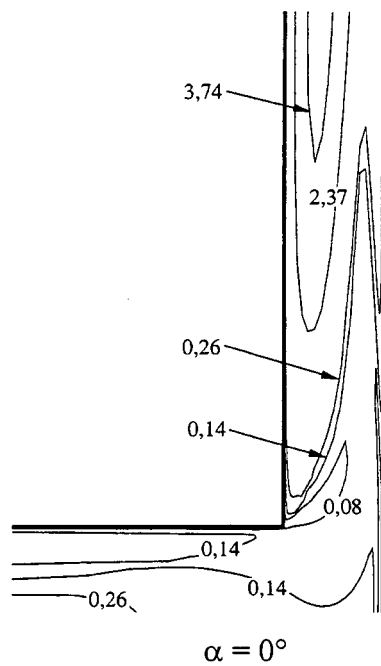
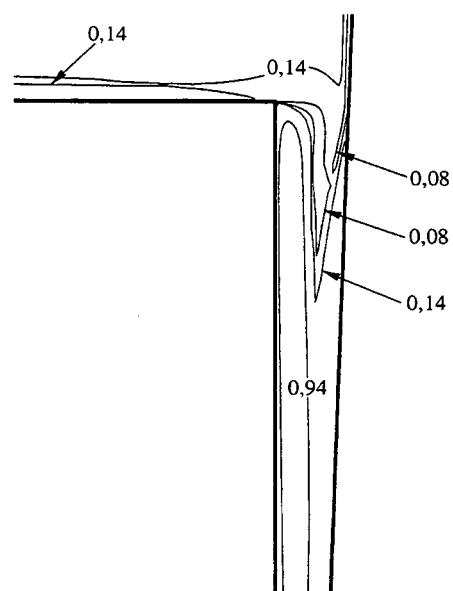


Figura 5.40: Influência da inclinação da palheta sobre a viscosidade efetiva ($\times 10^3$),
 $D/d = 3$ e $Re = 25.000$.



(região com paredes mais afastadas)

$\alpha = 2^\circ$



(região com paredes mais próximas)

(b) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.40: (continuação)

5.6.2 Distribuição de Pressão em Relação ao Diâmetro da Palheta

a) Palheta paralela ao assento

A influência da relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem, D/d , sobre a distribuição de pressão na palheta é mostrada nas Figuras 5.41 e 5.42 para números de Reynolds iguais a 5.000 e 25.000, respectivamente, sob diferentes condições de afastamento s_c/d .

Analisando inicialmente a condição de Reynolds 5.000, observa-se na Figura 5.41(a) que quando o afastamento entre a palheta e o assento é pequeno, os níveis de pressão são maiores para a relação $D/d = 3$. Por outro lado, nota-se nas Figuras 5.41(b) e (c) que à medida que o afastamento é aumentado os valores de pressão para a relação $D/d = 1,66$ eventualmente tornam-se maiores.

Os aspectos comentados acima podem ser explicados através de um simples balanço de energia, entre a entrada do orifício de passagem e a saída do difusor, para as duas relações de diâmetro.

Para a relação $D/d = 1,66$

$$p_e^* + \rho \frac{V_e^{*2}}{2} = p_s^* + \rho \frac{V_s^{*2}}{2} + h^* \quad (5.40)$$

Para a relação $D/d = 3,0$

$$p_e + \rho \frac{V_e^2}{2} = p_s + \rho \frac{V_s^2}{2} + h \quad (5.41)$$

onde os sub-índices “e” e “s” denotam as superfícies de controle na entrada e na saída do difusor, respectivamente. Por outro lado, h^* e h representam as perdas de carga devidas a efeitos viscosos em ambos os escoamentos.

Subtraindo a equação (5.41) de (5.40), e lembrando que a velocidade na entrada é a mesma para as duas relações de diâmetro, tem-se:

$$p_e^* - p_e = (p_s^* - p_s) + \rho \left(\frac{V_s^{*2} - V_s^2}{2} \right) + (h^* - h) \quad (5.42)$$

O segundo termo que aparece entre parênteses no lado direito da equação (5.42) representa a diferença entre os termos de energia cinética na saída do difusor para as duas relações de diâmetro e é sempre positivo, uma vez que para uma mesma vazão, a velocidade na saída do difusor é sempre maior para a menor relação de diâmetros ($V_s^* > V_s$). Com isto colocado, o efeito da diferença entre os termos de perda de carga para as duas relações de diâmetro é analisada a seguir para as diferentes condições de afastamento e número de Reynolds.

Quando as paredes estão muito próximas a pressão na saída do difusor para as duas relações de diâmetro é igual à pressão do ambiente de descarga ($p_s^* \cong p_s$). Assim,

$$p_e^* - p_e = \rho \left(\frac{V_s^{*2} - V_s^2}{2} \right) + (h^* - h) \quad (5.43)$$

A perda de carga é maior para a geometria com o maior comprimento do difusor ($h > h^*$) e, desta forma, a diferença entre as perdas de carga na equação (5.43) atua no sentido de tornar os níveis de pressão sobre a palheta maiores para a maior relação de diâmetros.

Com o aumento do afastamento, as perdas devidas à proximidade das paredes diminuem e as perdas na entrada do difusor devido à região de recirculação tornam-se progressivamente mais importantes. Assim, na situação de maior afastamento ($s_c/d = 0,07$) a perda de carga devida à região de recirculação fornece a maior contribuição para a perda através do difusor. Através das linhas de corrente mostradas na Figura 5.43 observa-se a semelhança do escoamento nesta região para as duas relações de diâmetro, podendo-se concluir que as perdas de energia são praticamente iguais para as duas relações de diâmetro ($h \cong h^*$). Por outro lado, embora não aconteça para a menor relação de diâmetros, as Figuras 5.41 e 5.42 mostram que a pressão na saída do difusor é nula ($p_s = 0$) para a relação $D/d = 3$, mesmo quando o afastamento s_c/d é elevado. Assim, a equação (5.42) fica

$$p_e^* - p_e = p_s^* + \rho \left(\frac{V_s^{*2} - V_s^2}{2} \right) \quad (5.44)$$

A razão da pressão na saída do difusor para a menor relação de diâmetros, p_s^* , não ser igual à pressão na descarga (Figuras 5.41 e 5.42) está relacionada às regiões de recirculação na entrada do difusor, mostradas na Figura 5.43 para ambas as relações de diâmetro na condição $s_c/d = 0,07$ e $Re = 25.000$. Pode ser observado claramente na figura, que a região de recirculação para a relação $D/d = 1,66$ se estende ao longo de praticamente todo o difusor, resultando em linhas de corrente curvas na saída e, portanto, uma pressão diferente daquela do ambiente de descarga. O efeito dos valores negativos de p_s^* , mostrados nas Figuras 5.41 e 5.42, na equação da energia é no sentido de tornar os valores de pressão na região de estagnação ($r/d < 0,5$) menores para a relação $D/d = 1,66$. Assim, pode-se concluir que os níveis de pressão mais elevados verificados para $D/d = 1,66$ nas situações de maiores afastamentos se deve à diferença entre os termos de energia cinética.

A Figura 5.42, se comparada com a Figura 5.41, é um indicativo de que o aumento do número de Reynolds eleva a contribuição da perda de carga devida à região de recirculação. A presença de uma maior região de recirculação no menor afastamento ($s_c/d = 0,03$) torna as perdas de carga das duas relações de diâmetro mais próximas, fazendo com que a diferença entre os termos de energia cinética seja suficiente para tornar as pressões de estagnação praticamente idênticas.

Nas Figuras 5.44 a 5.49 são mostrados os campos de algumas propriedades do escoamento obtidos para ambas as relações de diâmetros, considerando número de Reynolds $Re = 25.000$, afastamento $s_c/d = 0,03$ e inclinação $\alpha = 0^\circ$.

A Figura 5.44(a) mostra que o padrão das linhas de corrente no difusor é praticamente insensível à variação do diâmetro da palheta. O mesmo tamanho da região de recirculação indica que as quedas de pressão na entrada do difusor ($r/d \cong 0,5$) são praticamente iguais nos dois casos, como mostrado pelas distribuições de pressão da Figura 5.42(a). Uma outra representação deste resultado é dada na Figura 5.44(b) na forma de vetores de velocidade na região de entrada do difusor para as duas relações de diâmetros.

As isobáricas do escoamento, mostradas para diferentes regiões do difusor na Figura 5.45, revelam variações muito pequenas, originadas pelas diferentes relações de diâmetro. Este resultado está de acordo com as distribuições de pressão sobre a palheta da Figura 5.42(a).

As Figuras 5.46 a 5.49 apresentam campos de propriedades relacionadas aos níveis de turbulência do escoamento (escalas de comprimento, intensidade da turbulência, tensões de

Reynolds, viscosidade efetiva). Como pode ser observado, para esta condição de afastamento e número de Reynolds, as quantidades turbulentas são praticamente insensíveis a relação de diâmetros D/d .

b) Palheta inclinada em relação ao assento

Da mesma forma como realizada para o caso de palheta paralela ao assento, a Figura 5.50 mostra a influência da relação de diâmetros D/d sobre a distribuição de pressão considerando a palheta inclinada em duas situações distintas de afastamento: i) $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 1^\circ$ e ii) $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$. Em ambas se considera o número de Reynolds $Re = 25.000$. Similarmente ao que foi visto para a palheta paralela ao assento, observa-se que os valores da pressão na região de estagnação ($r/d < 0,5$) vão se tornando progressivamente maiores para a relação $D/d = 1,66$, em comparação com a relação $D/d = 3$, quando o afastamento vai sendo aumentado. No entanto, ao contrário do caso onde a palheta está paralela ao assento, os níveis de pressão para $D/d = 1,66$ não são maiores ao longo de toda superfície da palheta. Por exemplo, na região do difusor onde as paredes estão mais próximas por causa da inclinação da palheta (lado esquerdo da distribuição de pressão), a pressão é maior para a relação $D/d = 3$, devido à maior restrição que este caso exerce sobre o escoamento pela proximidade das paredes. Para tornar mais claro o fenômeno, apresenta-se na Figura 5.51 resultados de linhas de corrente no plano de simetria do difusor para as duas relações de diâmetro na condição $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$. Como pode ser visto, a restrição causada pela inclinação no caso de $D/d = 3$ diminui a região de recirculação na entrada do difusor no lado onde as paredes estão mais próximas. Isto é decorrente da diminuição do escoamento naquela região, o qual acaba sendo direcionado para a região onde as paredes estão mais afastadas e produzindo lá uma região de recirculação de grandes proporções. Desta forma, no lado esquerdo da distribuição, a queda de pressão para $D/d = 3$ não é tão grande quanto aquela verificada para $D/d = 1,66$, uma vez que os seus níveis de velocidade são menores. O oposto acontece no lado direito da distribuição de pressão.

A seguir é investigada a influência da relação de diâmetro sobre os campos de propriedades do escoamento (pressão, escala de comprimento da turbulência, intensidade da turbulência, tensões de Reynolds e viscosidade efetiva) em três regiões do difusor: orifício de passagem, entrada do difusor onde as paredes estão mais afastadas e entrada do difusor onde as

paredes estão mais próximas. Inicialmente, nas Figuras 5.52 a 5.56 é explorada a situação de número de Reynolds $Re = 25.000$, afastamento $s_c/d = 0,05$ e inclinação $\alpha = 1^\circ$. Em seguida, nas Figuras 5.57 a 5.61, a situação de maior afastamento, $s_c/d = 0,07$, e maior inclinação, $\alpha = 2^\circ$, é investigada para o mesmo número de Reynolds.

Em concordância como observado para as distribuições de pressão da Figura 5.50(a), as isobáricas no orifício de passagem, Figura 5.52(a), mostram a dependência do campo de pressão em relação ao diâmetro da palheta. Este comportamento, está relacionado com as considerações de energia discutidas para o caso de palheta paralela ao assento. As Figuras 5.52(b) e (c) mostram a influência do diâmetro da palheta sobre os campos de pressão nas regiões onde as paredes do difusor estão mais afastadas e mais próximas, respectivamente, e estão em linha com o que foi discutido na Figura 5.50.

As Figuras 5.53 a 5.56 mostram que as propriedades turbulentas na região do orifício de passagem são praticamente independentes da relação de diâmetros. Já nas regiões de maior e menor afastamento entre as paredes do difusor, alguma variação é verificada. Por exemplo, nas Figuras 5.53(b) e (c) observa-se que as escalas de comprimento, embora pouco dependentes da relação D/d , apresentam variações visíveis na posição radial correspondente à saída do difusor da relação $D/d = 1,66$. Já na Figura 5.54(b) observa-se um aumento da intensidade da turbulência devido ao aumento da relação D/d na região onde as paredes do difusor estão mais afastadas. O oposto acontece onde as paredes estão mais próximas, conforme ilustrado na Figura 5.54(c). Estas variações estão essencialmente ligadas às variações nas regiões de recirculação, na entrada do difusor, causadas pela mudança na relação de diâmetro. As Figuras 5.55 e 5.56 mostram para as tensões de Reynolds e viscosidade efetiva, respectivamente, um comportamento na região de entrada do difusor similar ao verificado para a intensidade da turbulência.

Nas Figuras 5.57 a 5.61 são apresentados os campos de propriedades do escoamento para número de Reynolds 25.000, afastamento $s_c/d = 0,07$ e inclinação $\alpha = 2^\circ$, em função da relação de diâmetros entre palheta e orifício de passagem (D/d).

A influência da relação de diâmetros sobre o campo de pressão é mostrada através de isobáricas na Figura 5.57. Essencialmente, o comportamento do campo de pressão reflete o que foi discutido anteriormente para as distribuições de pressão sobre a palheta ilustrada na Figura 5.50(b). Por exemplo, na Figuras 5.57(c) observa-se, para a relação de diâmetros $D/d = 3,0$, a

recuperação da pressão dentro do difusor, na região onde as paredes estão mais próximas, conforme já havia sido indicado na Figura 5.50(b).

Novamente, como pode ser constatado nas Figuras 5.58 a 5.61, não há variação significativa para os campos de propriedades turbulentas na região do orifício de passagem em função da mudança na relação de diâmetro. De fato, as variações importante acontecem somente na região de entrada do difusor em decorrência da alteração das regiões de recirculação, bem como dos níveis de velocidade. Como foi explorado na Figura 5.51, a maior relação de diâmetros ocasiona uma maior restrição ao escoamento na região do difusor onde as paredes estão mais próximas. Por este motivo, o fluido tende a escoar, preferencialmente, pelo outro lado do difusor. Como pode ser observado na Figura 5.51, o resultado disto é a formação de regiões de recirculação distintas nas duas situações de relação de diâmetros.

No caso das escalas de comprimento no difusor, das Figuras 5.58(a) e (b), pode ser observado que os seus valores sofrem um pequeno aumento com o aumento da relação D/d . Já para a intensidade da turbulência apresentada na Figura 5.59(b), observa-se claramente para $D/d = 3,0$, a elevação de seus valores na região do difusor onde as paredes estão mais afastadas, decorrente da região de recirculação mais intensa (ver Figura 5.51). O contrário acontece no lado do difusor com as paredes mais próximas, Figura 5.59(c), onde a intensidade da turbulência é vista diminuir com o aumento da relação D/d . É interessante notar que, embora a magnitude da intensidade da turbulência seja menor para esta situação de afastamento s_c/d mais elevado, a variação dos campos, decorrente da alteração da relação de diâmetros, é mais intensa, quando comparada com a situação analisada anteriormente (afastamento $s_c/d = 0,05$ e inclinação $\alpha = 1^\circ$). Um comportamento similar ao da intensidade da turbulência na região do difusor é também observado para as tensões de Reynolds e para a viscosidade efetiva, indicados nas Figuras 5.60 e 5.61.

Resumindo os resultados desta seção, pode ser concluído que as propriedades do escoamento através do difusor são afetadas pela variação da relação de diâmetros D/d , e de forma mais acentuada pela variação do afastamento s_c/d , sendo que a maior influência acontece sobre os campos de velocidade e de pressão. Naturalmente, estas variações são funções da combinação dos vários parâmetros do escoamento, tais como número de Reynolds e afastamento entre a palheta e o assento.

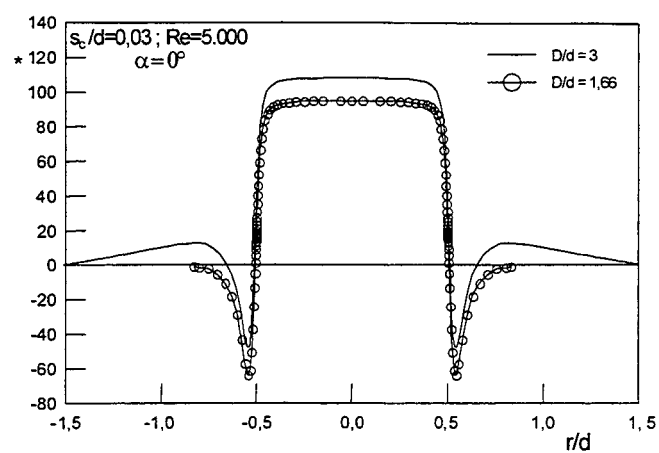
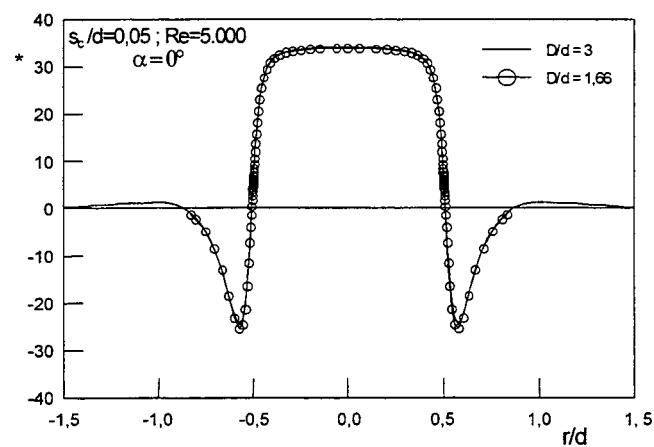
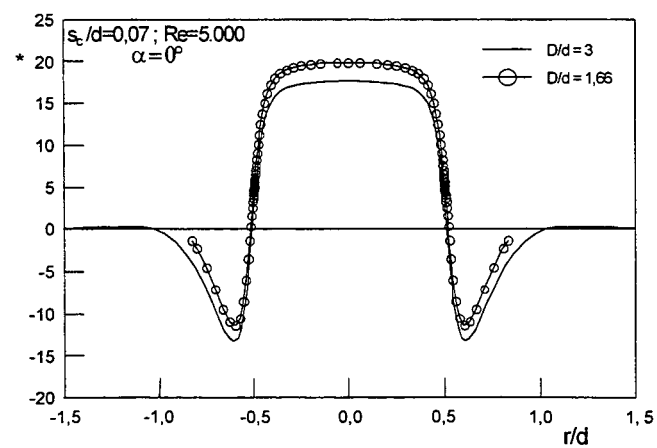
(a) $s_c/d = 0,03$ (b) $s_c/d = 0,05$ (c) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.41: Influência do diâmetro da palheta sobre a distribuição de pressão na palheta, $Re = 5.000$ e $\alpha = 0^\circ$.

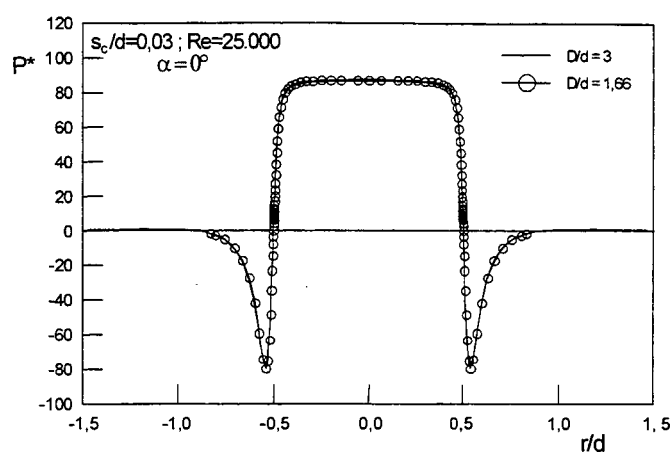
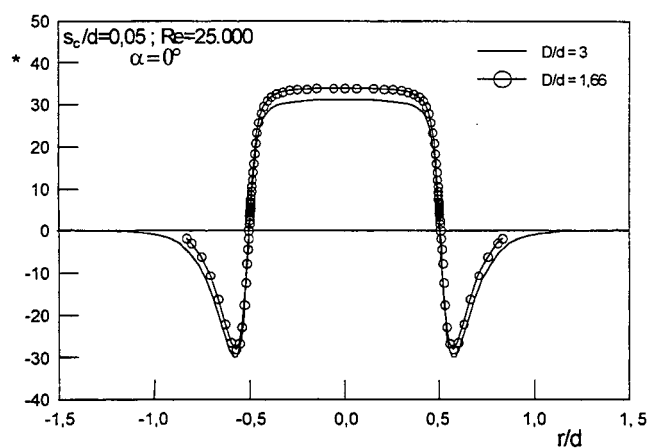
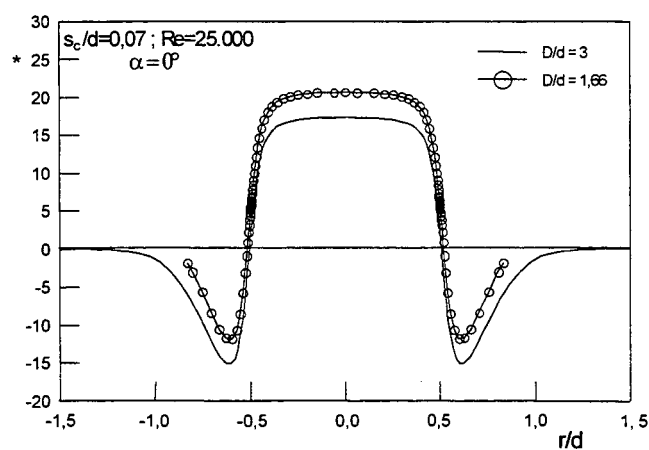
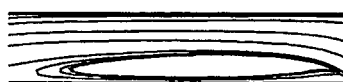
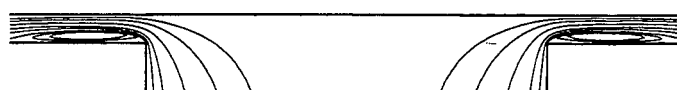
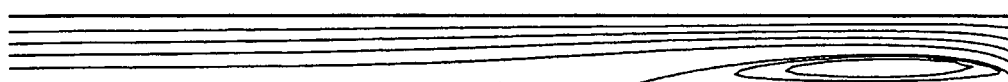
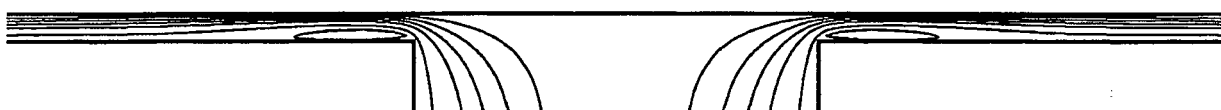
(a) $s_c/d = 0,03$ (b) $s_c/d = 0,05$ (c) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.42: Influência do diâmetro da palheta sobre a distribuição de pressão na palheta; $Re = 25.000$ e $\alpha = 0^\circ$.



(vista ampliada do lado esquerdo do difusor)

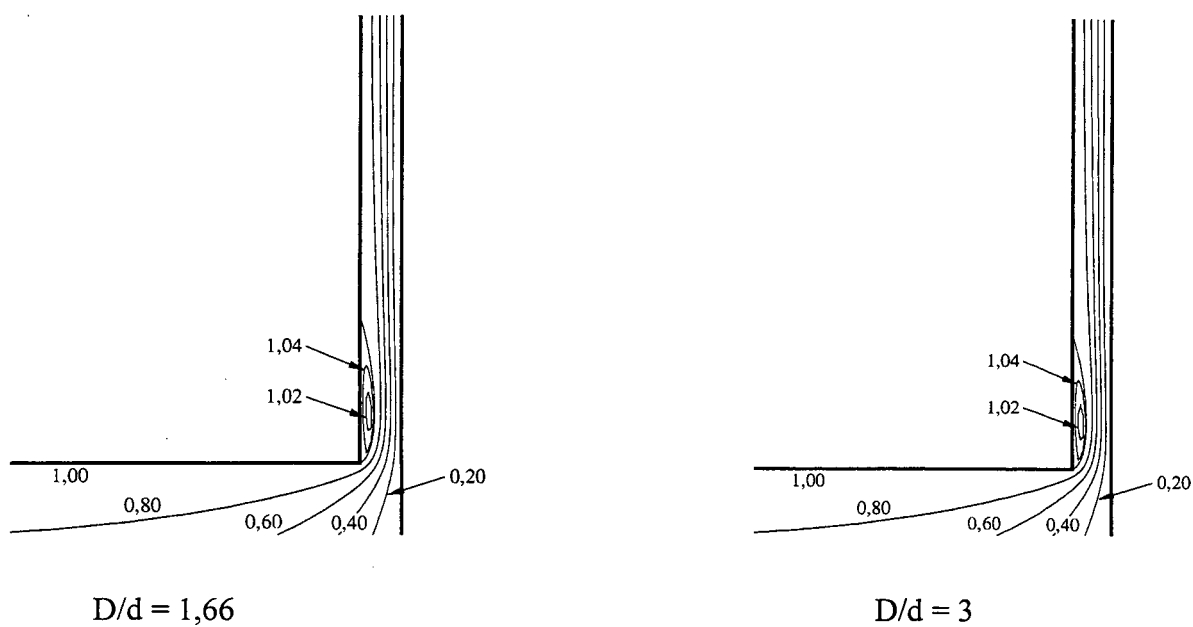
a) $D/d = 1,66$



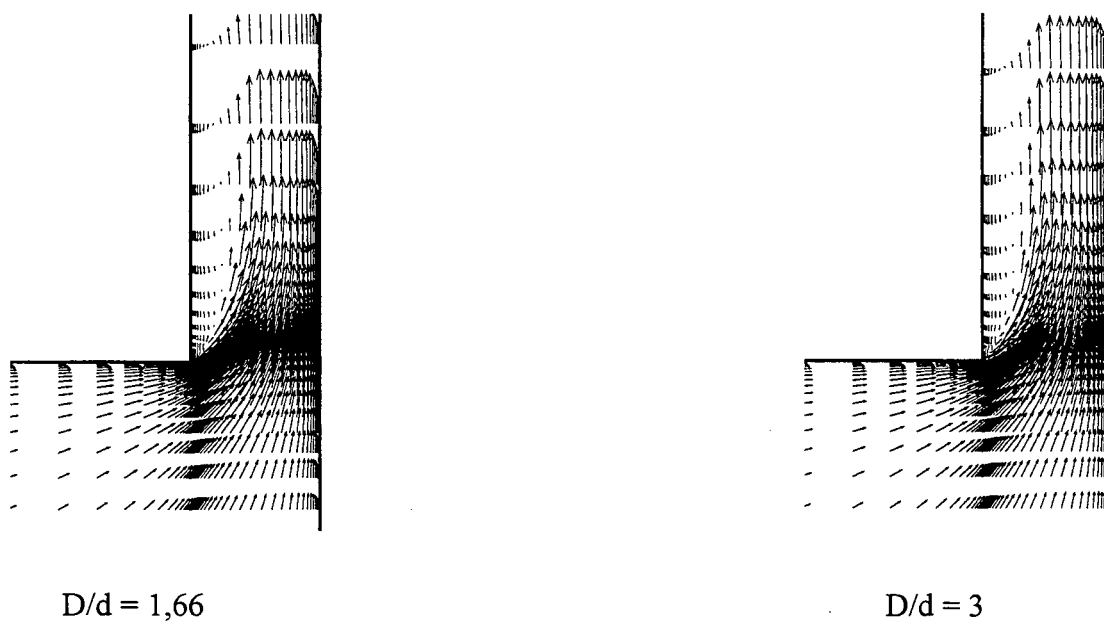
(vista ampliada do lado esquerdo do difusor)

b) $D/d = 3$

Figura 5.43: Linhas de corrente no difusor para as duas relações de diâmetro;
 $s_c/d = 0,07$; $Re = 25.000$ e $\alpha = 0^\circ$.



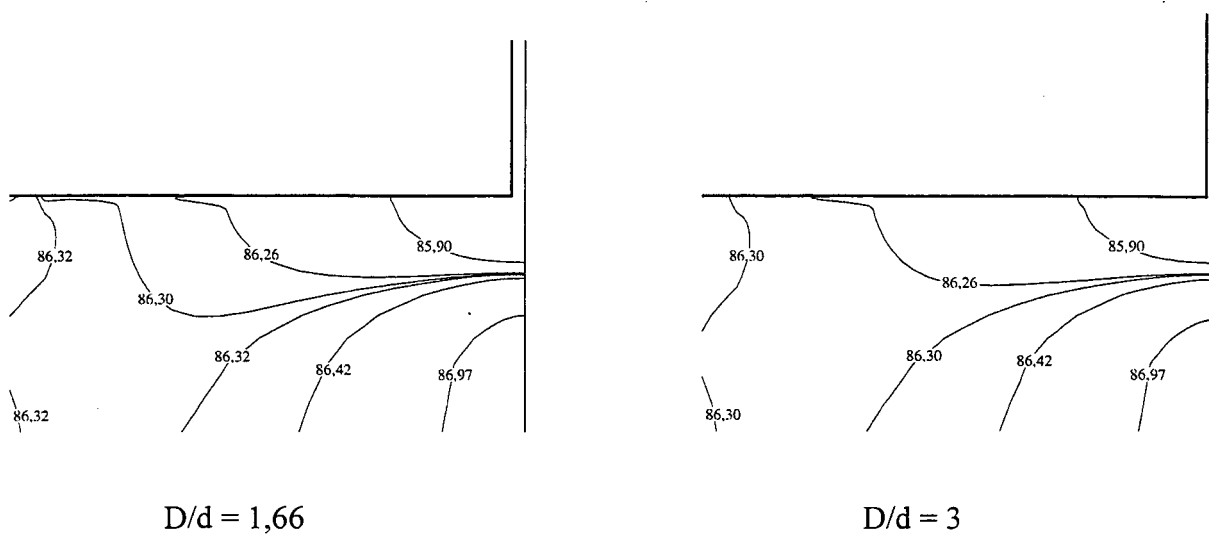
(a) Linhas de corrente no difusor.



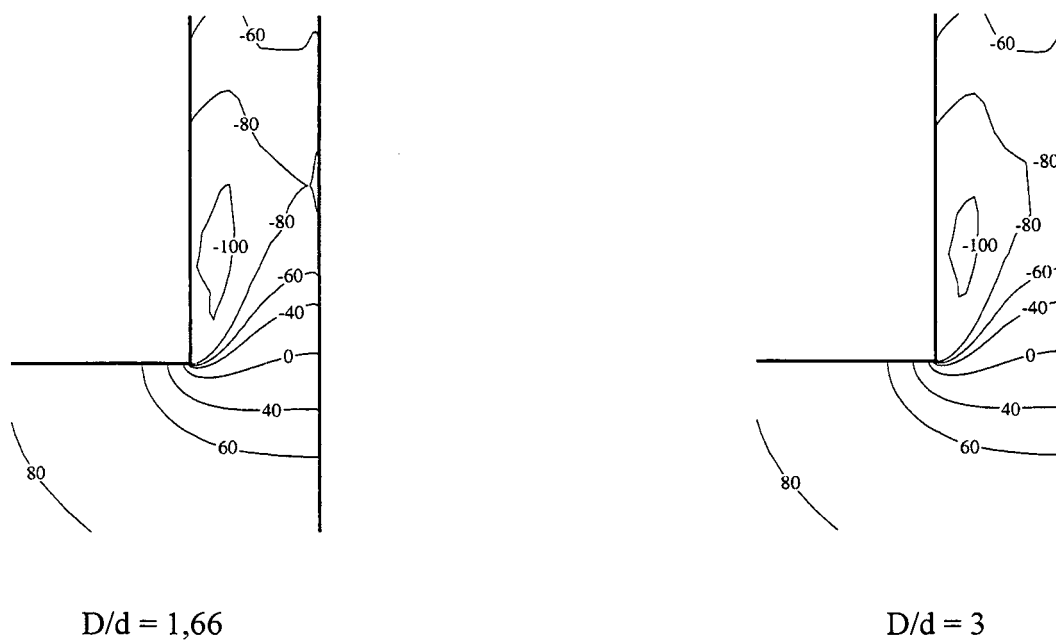
(b) Vetores velocidade na entrada do difusor.

Figura 5.44: Influência da relação de diâmetros D/d sobre o campo de velocidade:

$Re = 25.000$, $s_c/d = 0,03$ e $\alpha = 0^\circ$.



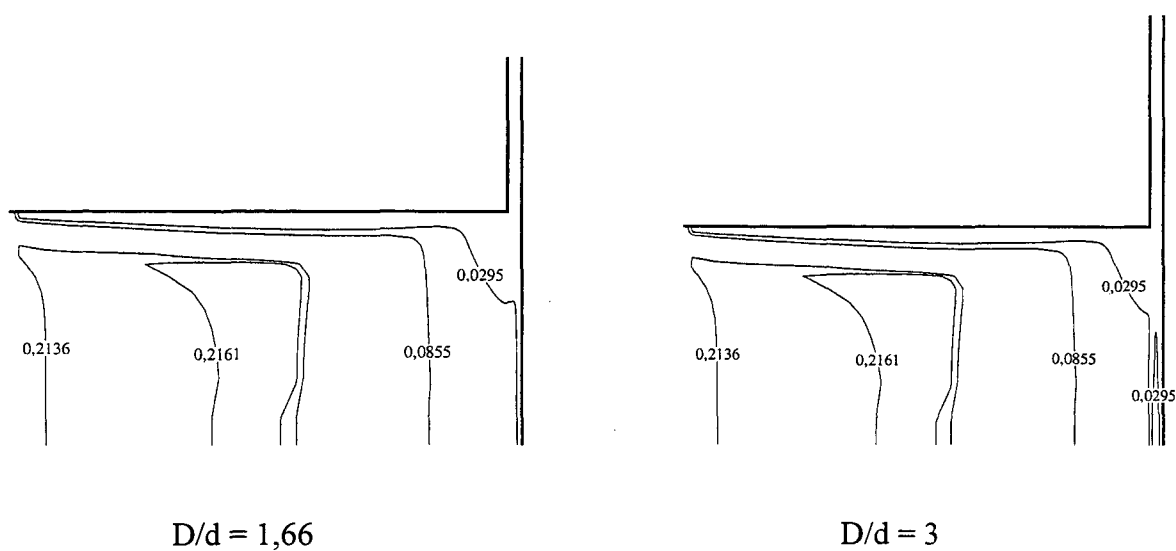
(a) Isobáricas no orifício de passagem.



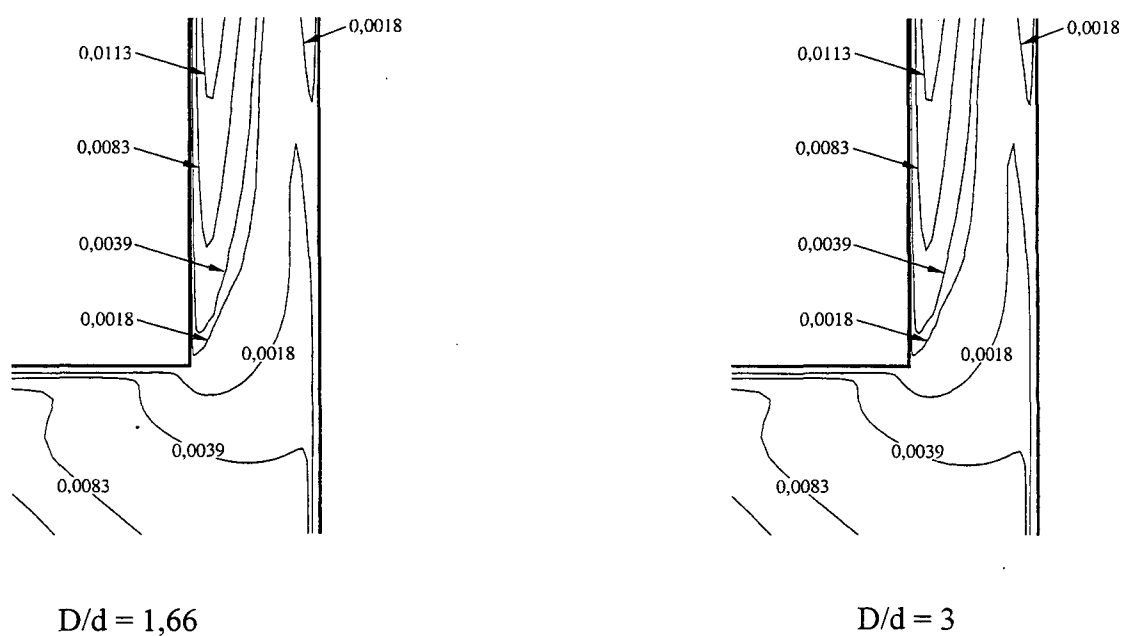
(b) Isobáricas na entrada do difusor.

Figura 5.45: Influência da relação de diâmetros D/d sobre o campo de pressão

$$P^* [= p / (1/2 \rho U_{in}^2)]: Re = 25.000, s_c/d = 0,03 \text{ e } \alpha = 0^\circ.$$

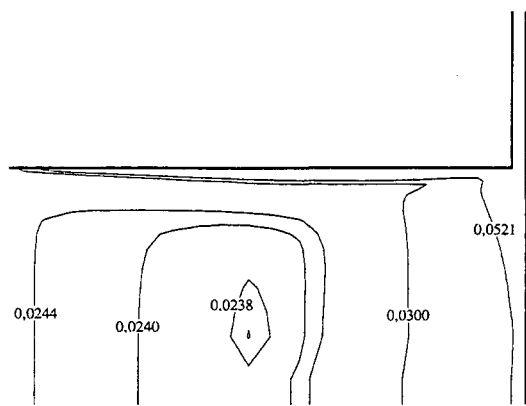
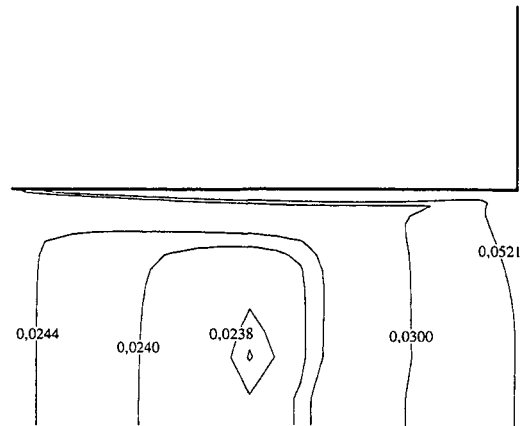


(a) Isolinhas de escalas de comprimento no orifício de passagem.

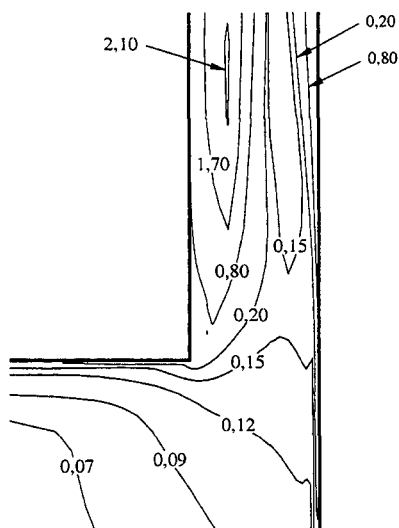
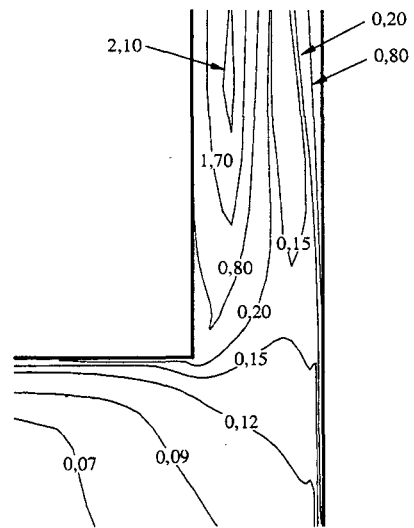


(b) Isolinhas de escalas de comprimento na entrada do difusor.

Figura 5.46: Influência da relação de diâmetros D/d sobre as escalas de comprimento da turbulência L ($= \ell/d$): $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,03$ e $\alpha = 0^\circ$.


 $D/d = 1,66$

 $D/d = 3$

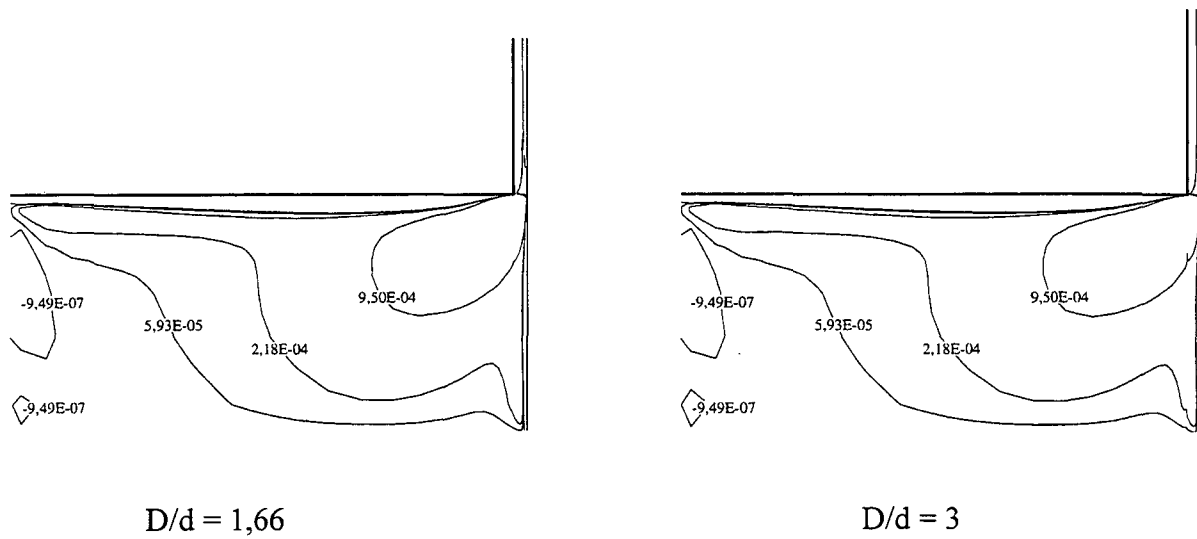
(a) Isolinhas de intensidade da turbulência no orifício passagem.


 $D/d = 1,66$

 $D/d = 3$

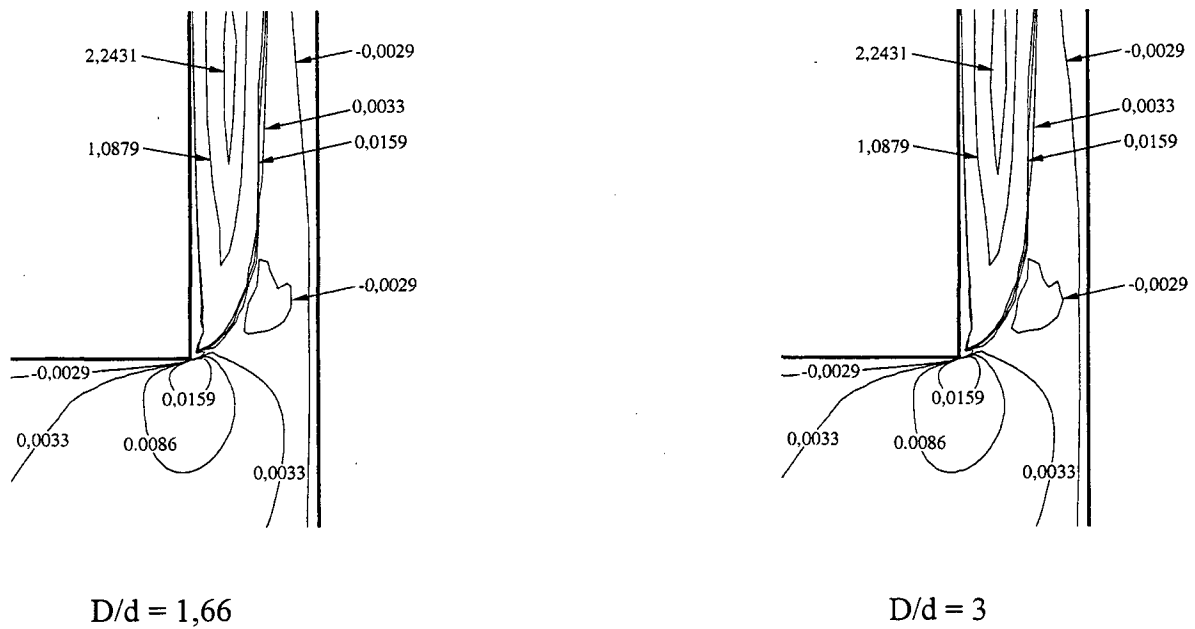
(b) Isolinhas de intensidade da turbulência na entrada do difusor.

Figura 5.47: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a intensidade da turbulência

$$I \left[= \frac{(2k/3)^{1/2}}{U_{in}} \right]: Re = 25.000, s_c/d = 0,03 \text{ e } \alpha = 0^\circ.$$

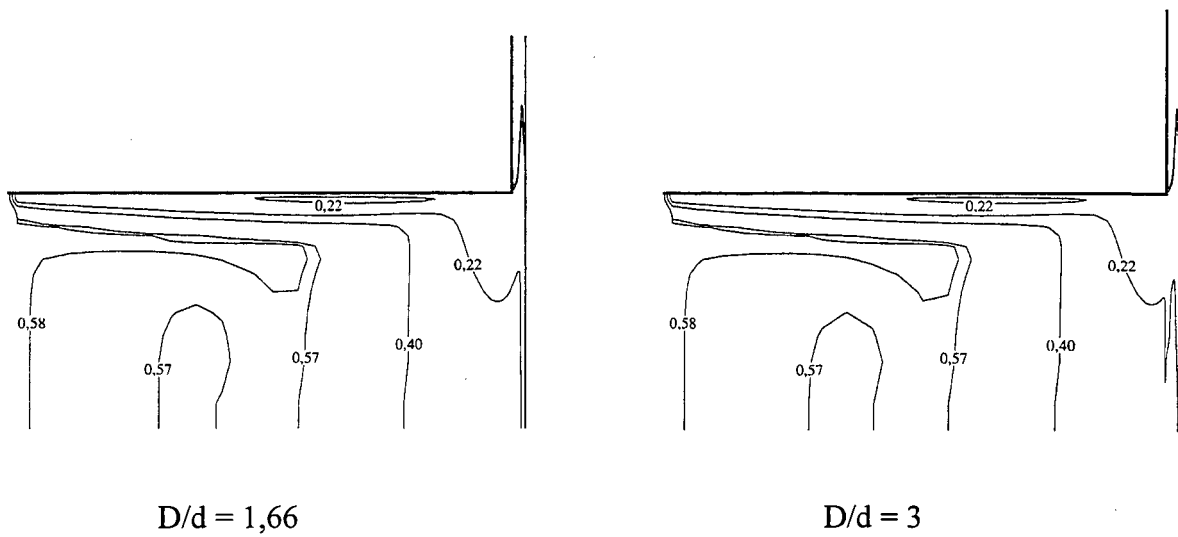


(a) Isolinhas de tensões de Reynolds no orifício de passagem.

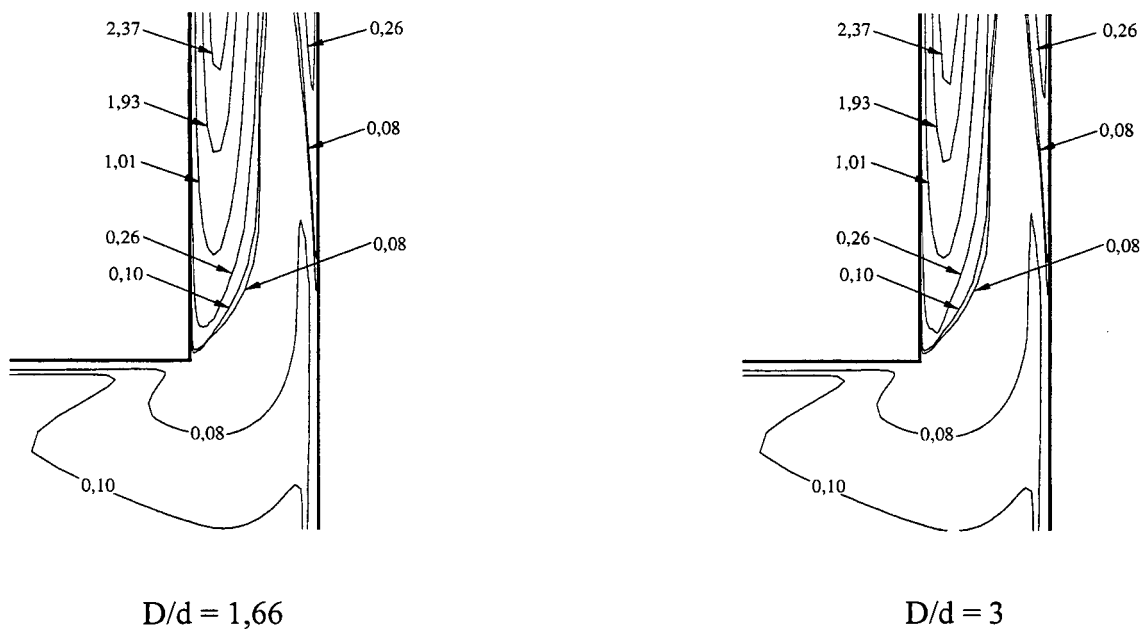


(b) Isolinhas de tensões de Reynolds na entrada do difusor.

Figura 5.48: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a tensão de Reynolds adimensional: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,03$ e $\alpha = 0^\circ$.



(a) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) no orifício de passagem.



(b) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) na entrada do difusor.

Figura 5.49: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a viscosidade efetiva adimensional: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,03$ e $\alpha = 0^\circ$.

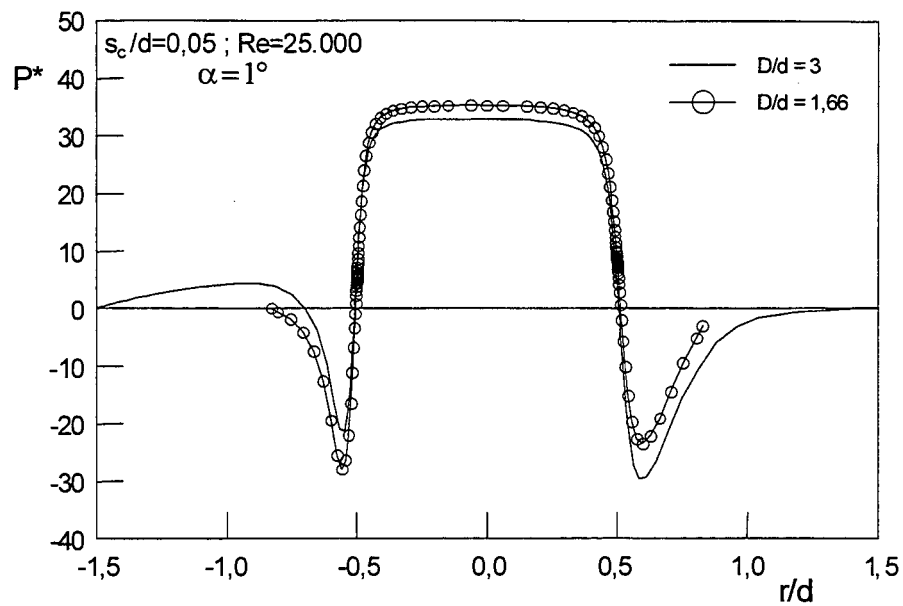
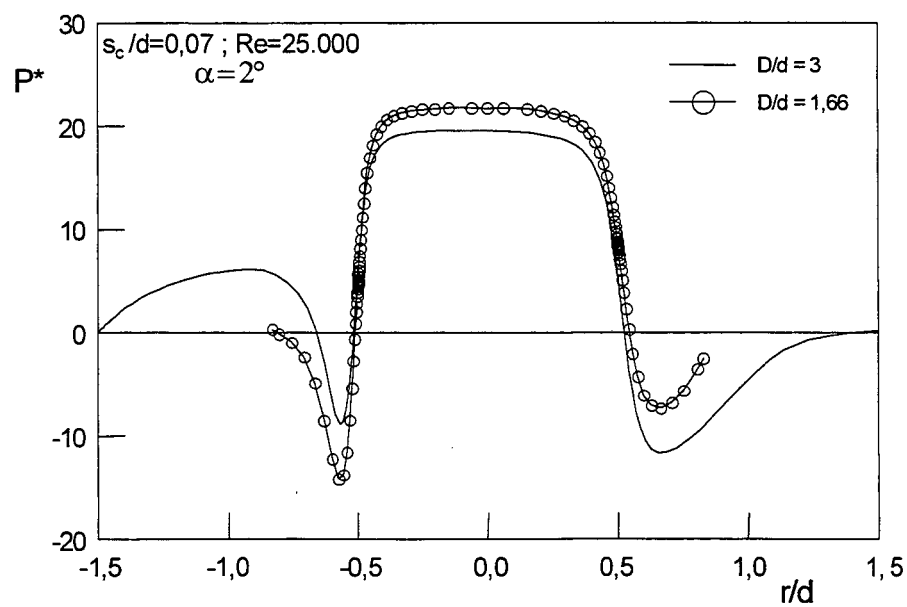
(a) $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 1^\circ$ (b) $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$

Figura 5.50: Efeito da relação de diâmetros D/d sobre a distribuição de pressão na palheta;
 $Re = 25.000$.

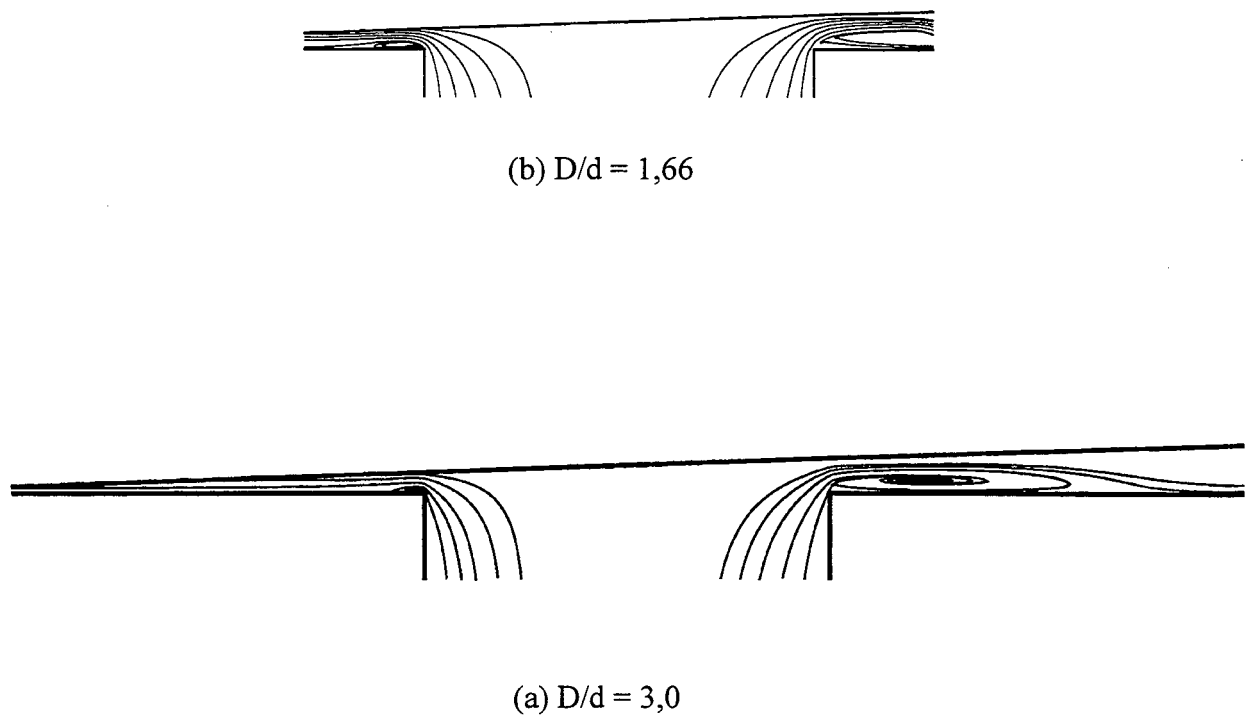
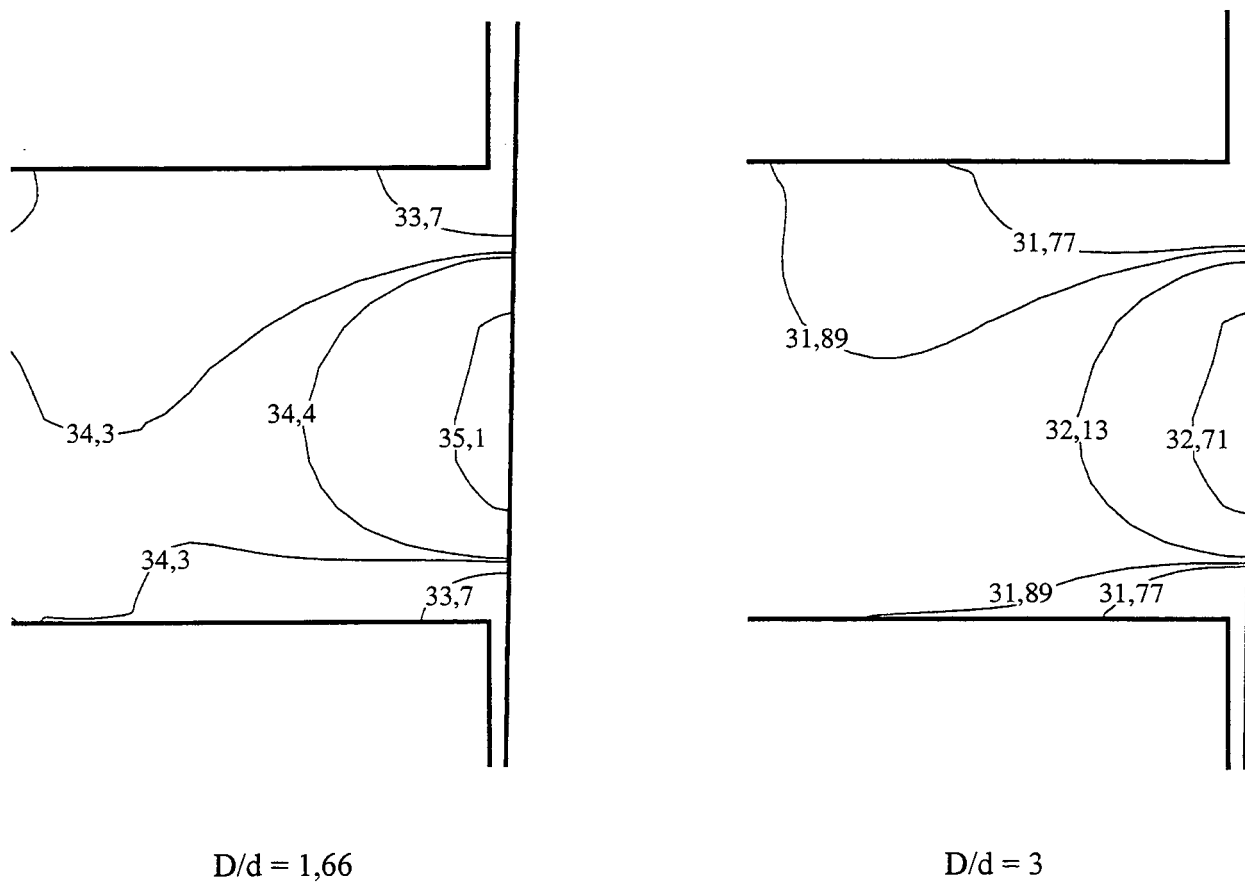


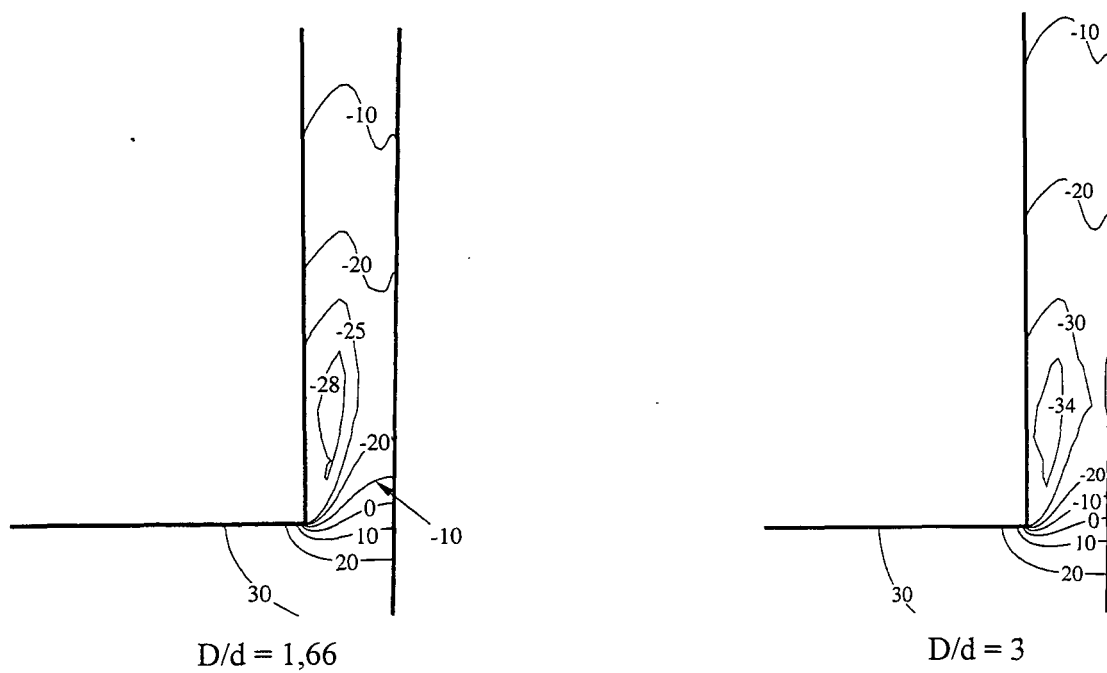
Figura 5.51: Trajetória das partículas de fluido no plano de simetria do escoamento: $s_c/d = 0,07$ e $Re = 25.000$.



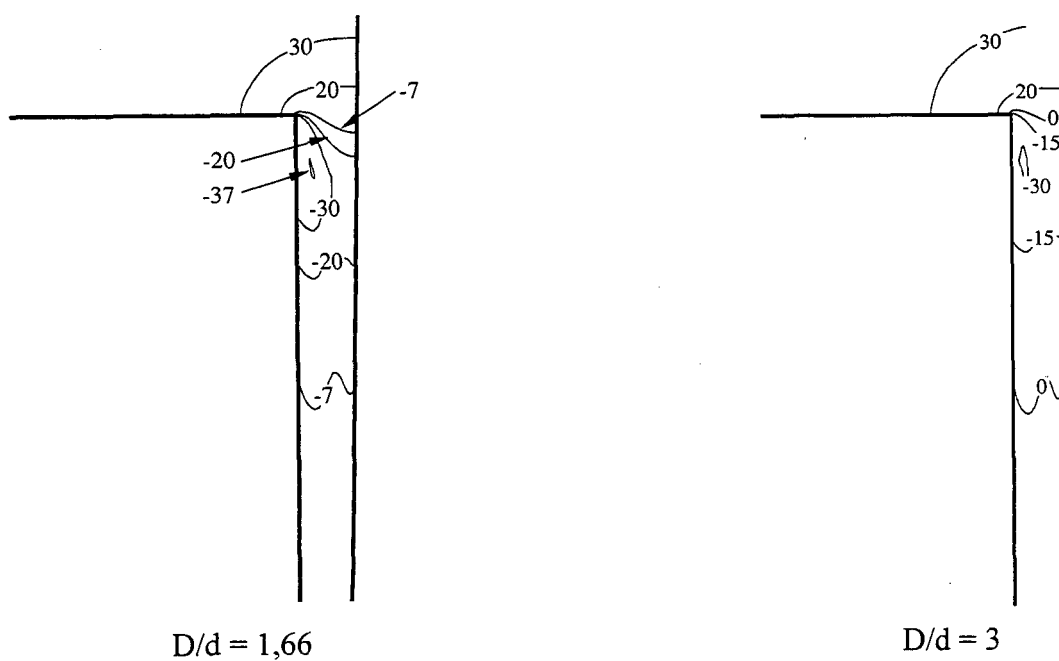
(a) Isobáricas no orifício de passagem.

Figura 5.52: Influência da relação de diâmetros D/d sobre o campo de pressão

$$P^* [= p / (1/2 \rho U_{in}^2)] :: Re = 25.000, s_c/d = 0,05 \text{ e } \alpha = 1^\circ.$$

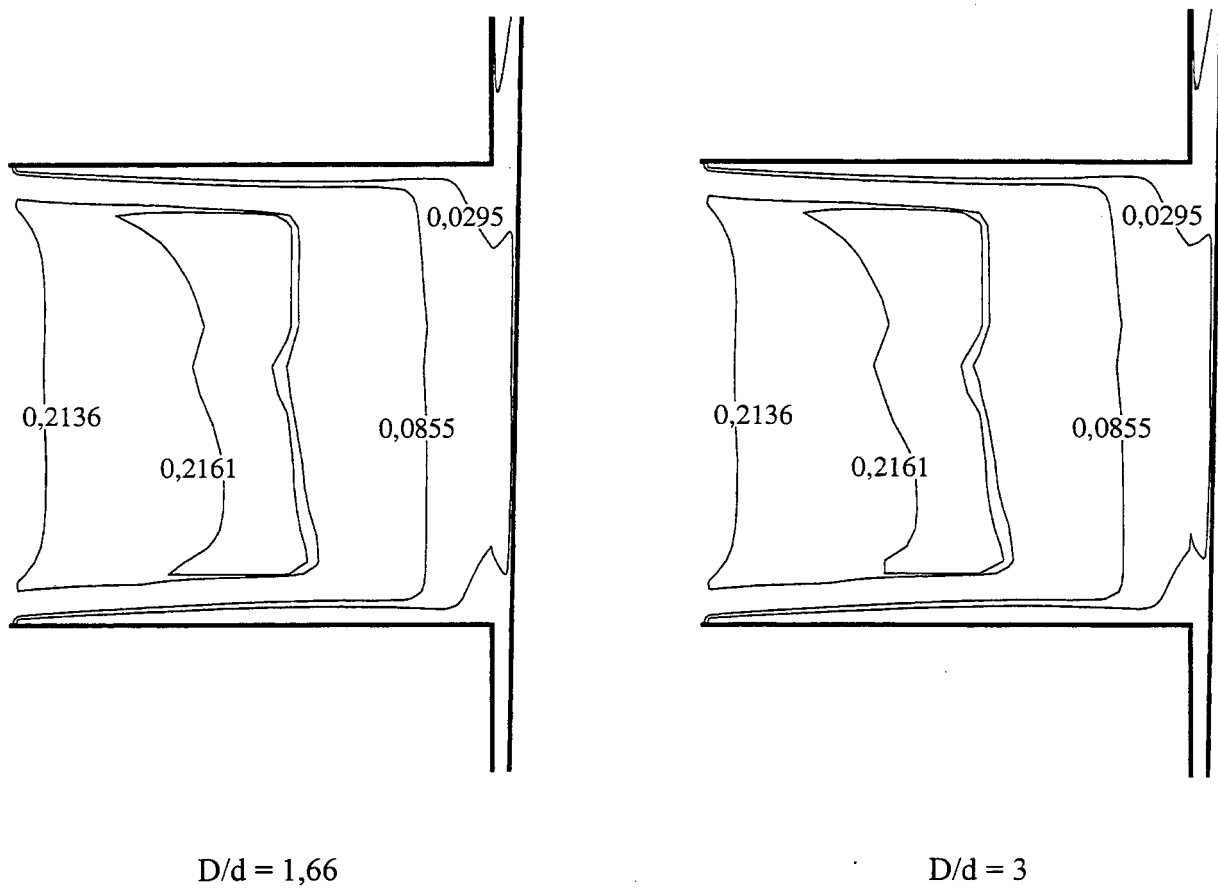


(b) Isobáricas na região com paredes mais afastadas.



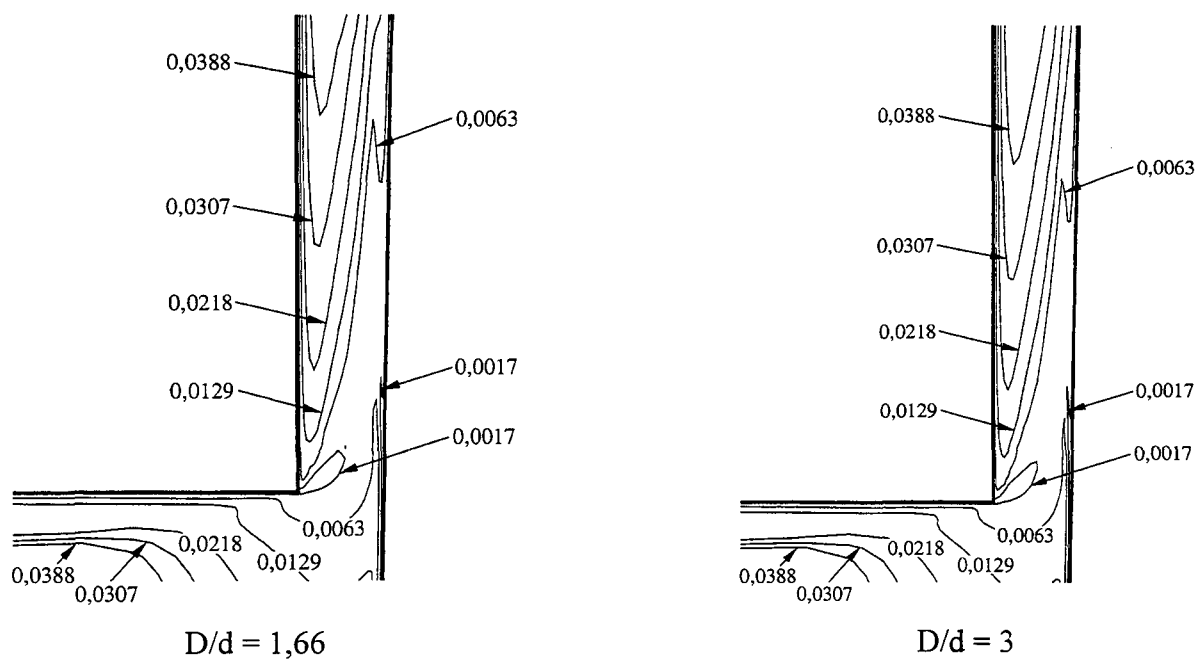
(c) Isobáricas na região com paredes mais próximas.

Figura 5.52: (continuação)

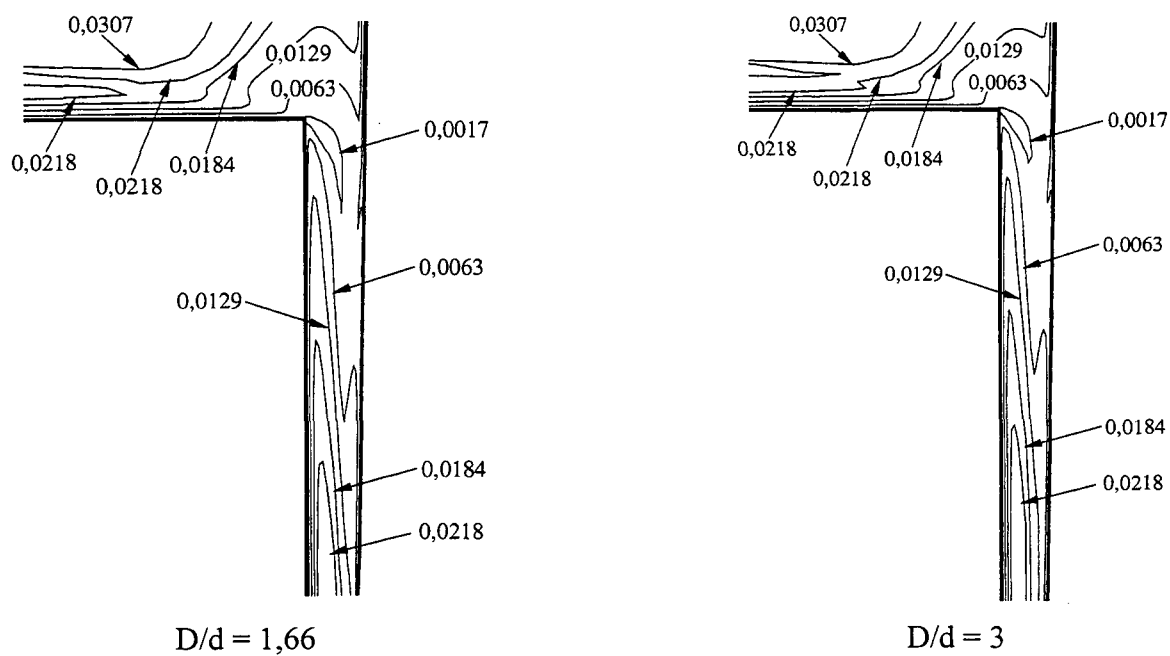


(a) Isolinhas de escalas de comprimento no orifício de passagem.

Figura 5.53: Influência da relação de diâmetros D/d sobre as escalas de comprimento da turbulência L ($= \ell/d$): $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 1^\circ$.

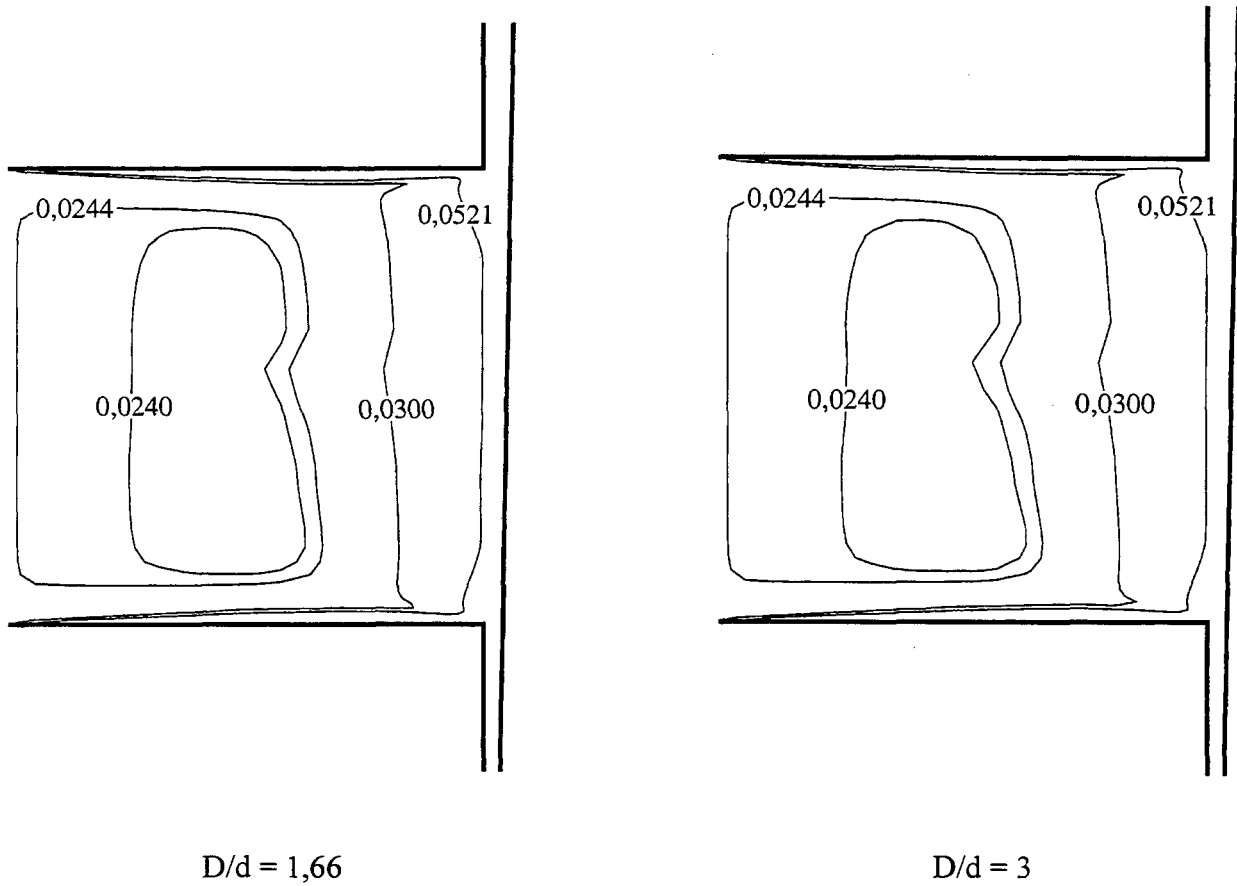


(b) Isolinhas de escalas de comprimento na região com paredes mais afastadas.



(c) Isolinhas de escalas de comprimento na região com paredes mais próximas.

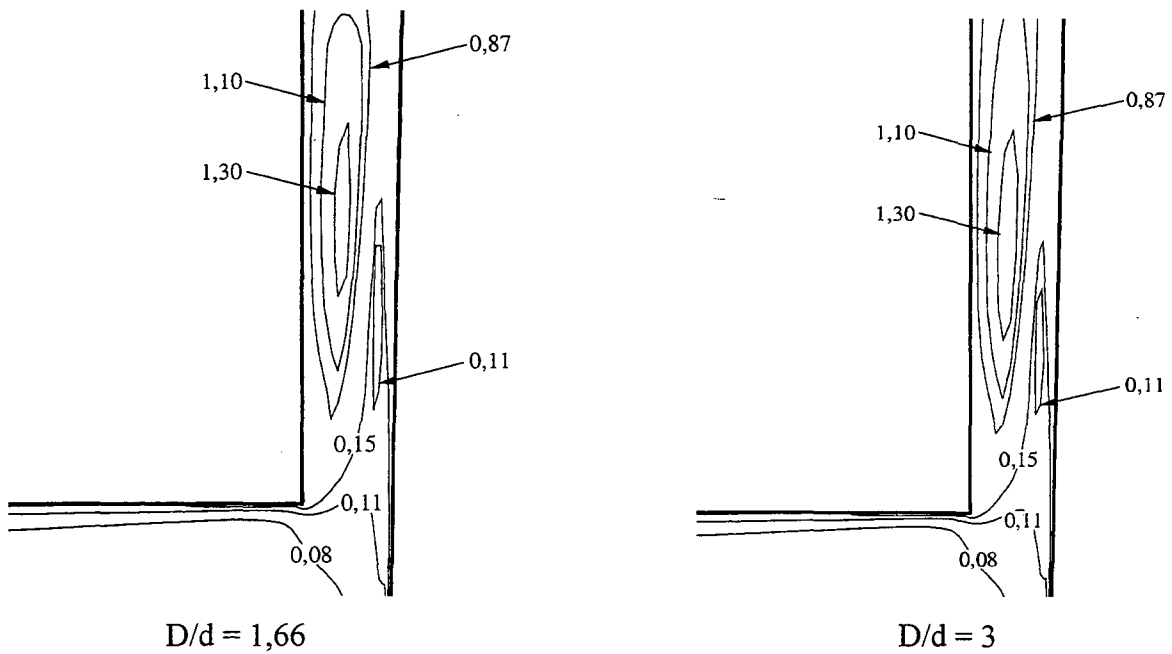
Figura 5.53: (continuação)



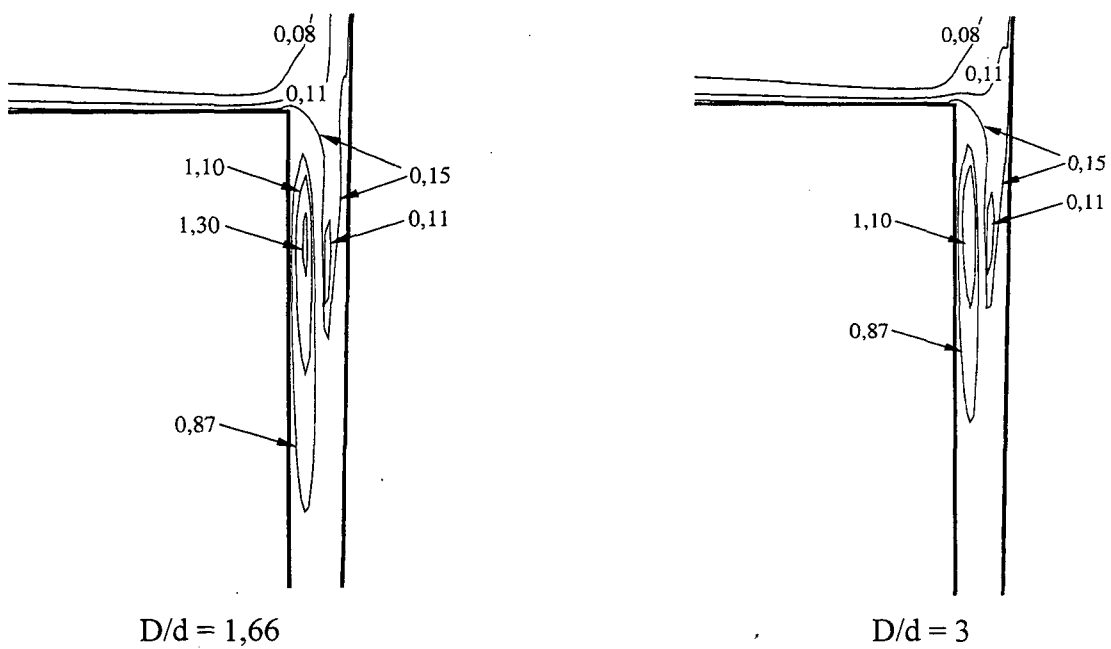
(a) Isolinhas de intensidade da turbulência no orifício de passagem.

Figura 5.54: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a intensidade da turbulência

$$I [= (2k/3)^{1/2} / U_{in}]: Re = 25.000, s_c/d = 0,05 \text{ e } \alpha = 1^\circ.$$

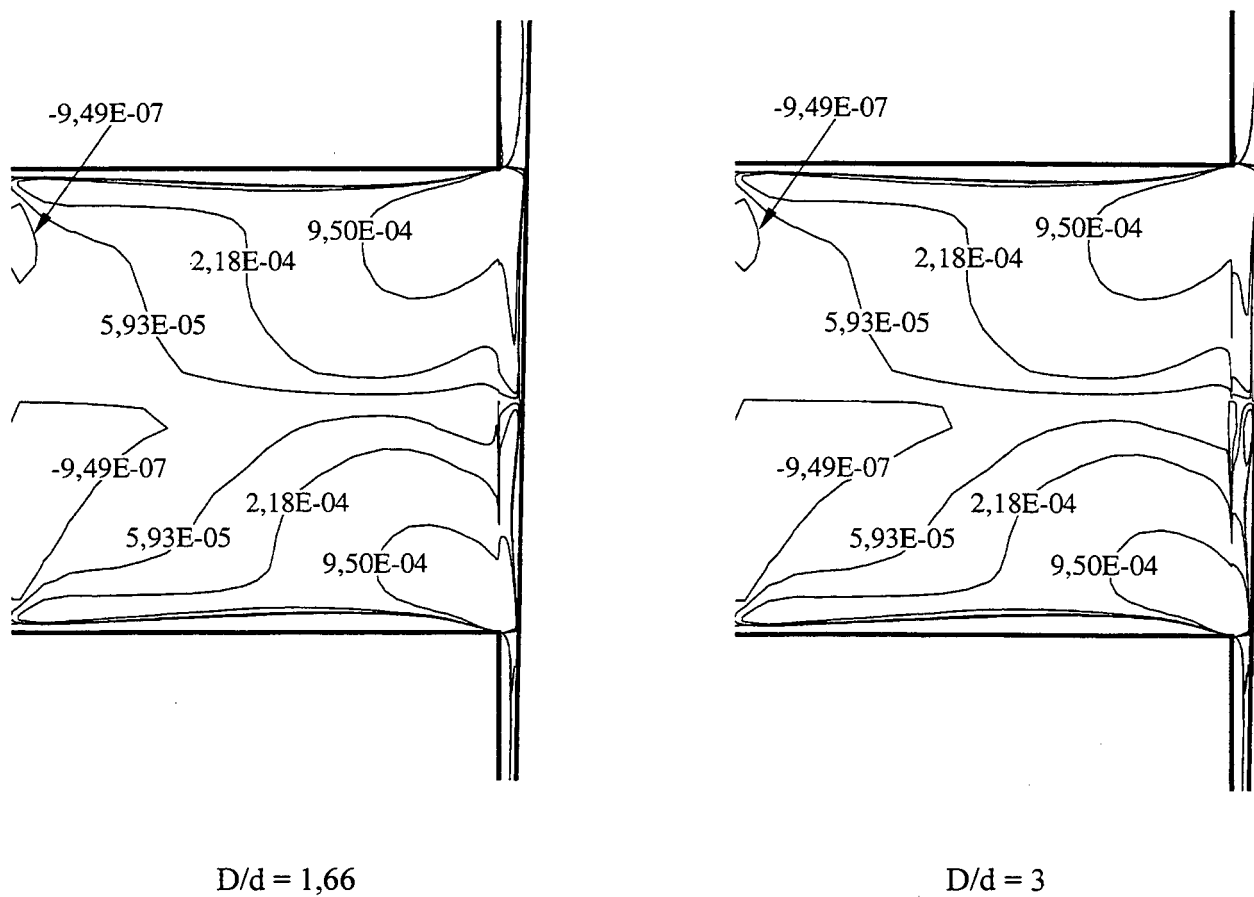


(b) Isolinhas de intensidade da turbulência na região com paredes mais afastadas.



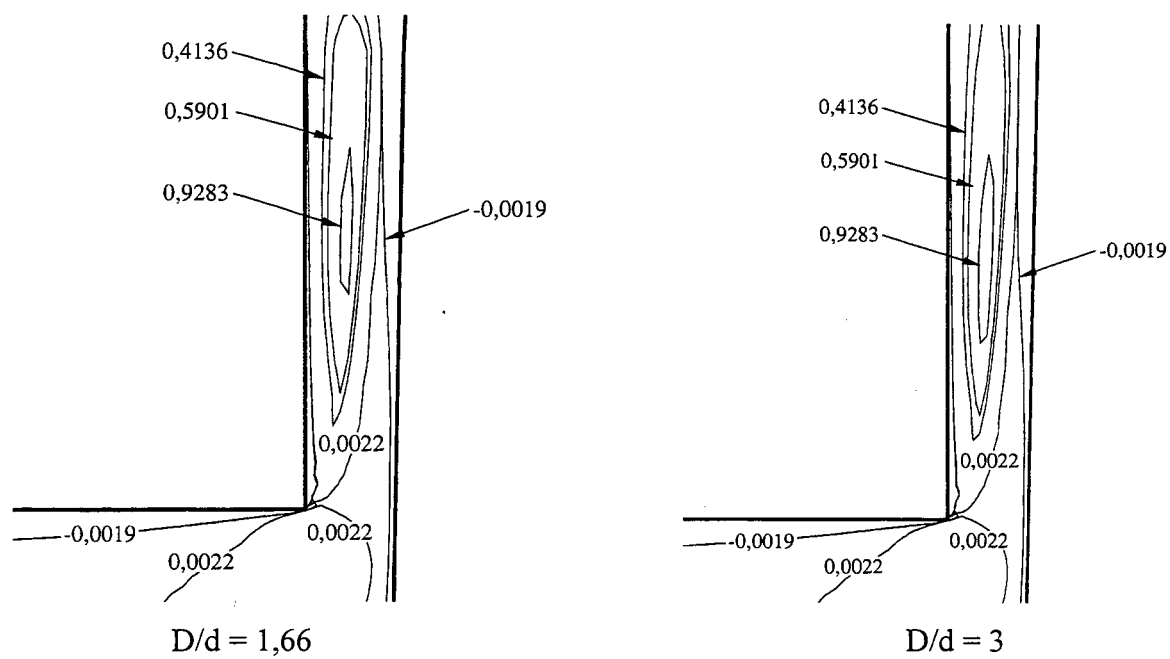
(c) Isolinhas de intensidade da turbulência na região com paredes mais próximas.

Figura 5.54: (continuação)

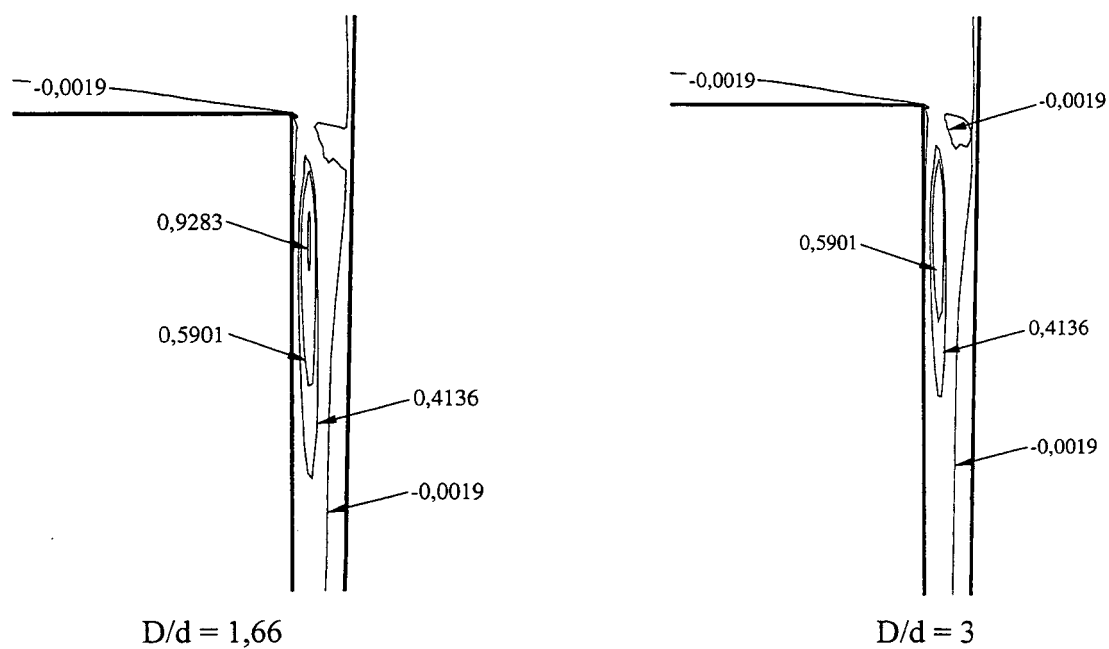


(a) Isolinhas de tensões de Reynolds no orifício de passagem.

Figura 5.55: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a tensão de Reynolds adimensional: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 1^\circ$.

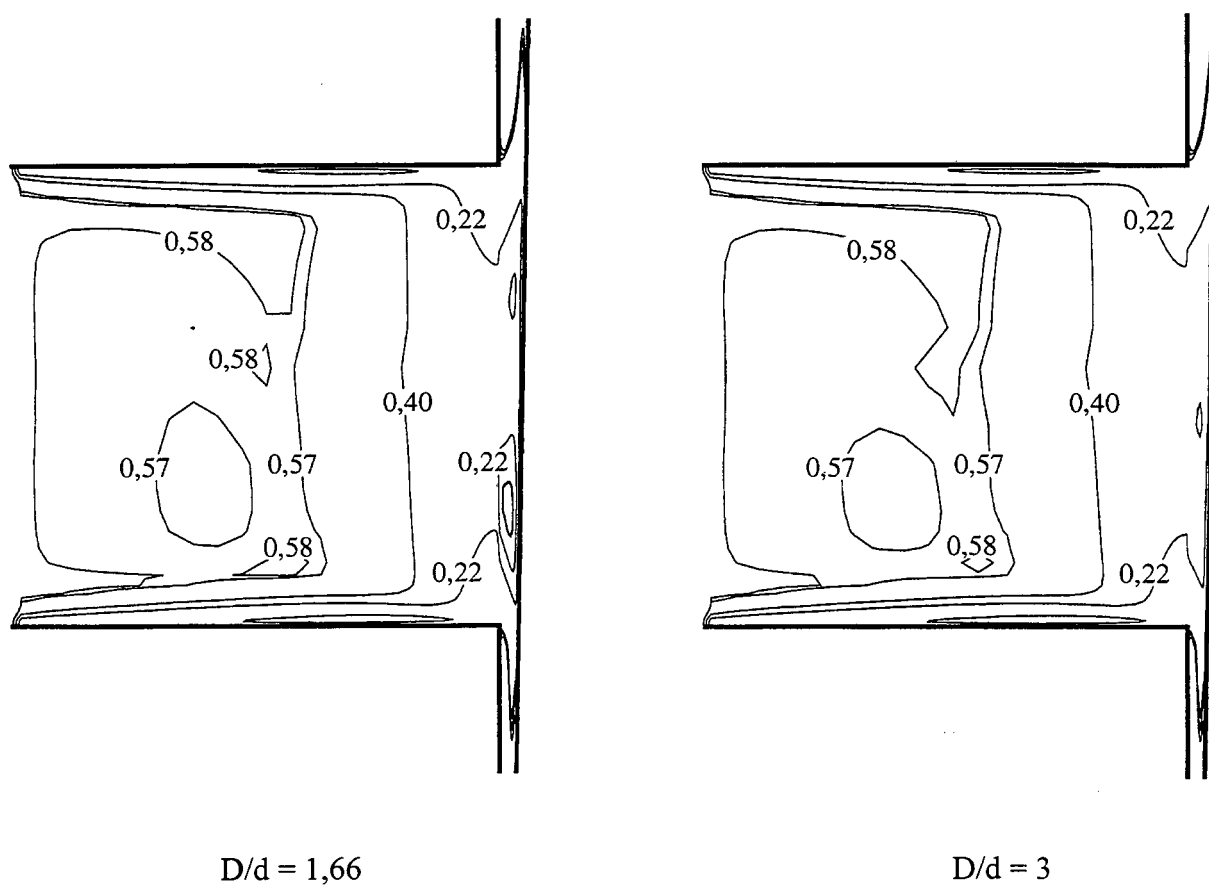


(b) Isolinhas de tensões de Reynolds na região com paredes mais afastadas.



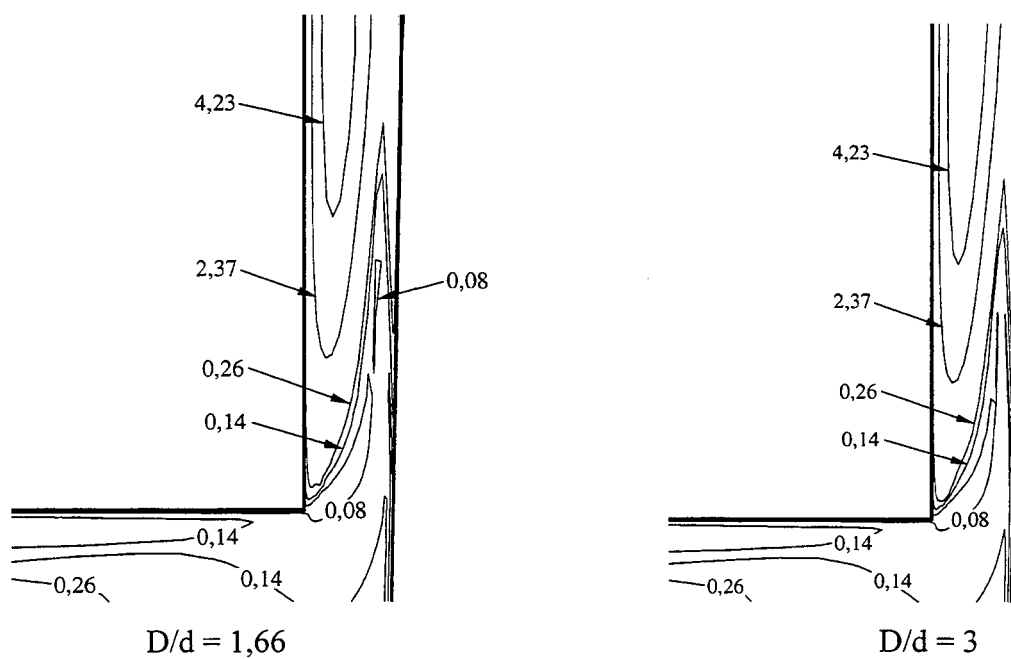
(c) Isolinhas de tensões de Reynolds na região com paredes mais próximas.

Figura 5.55: (continuação)

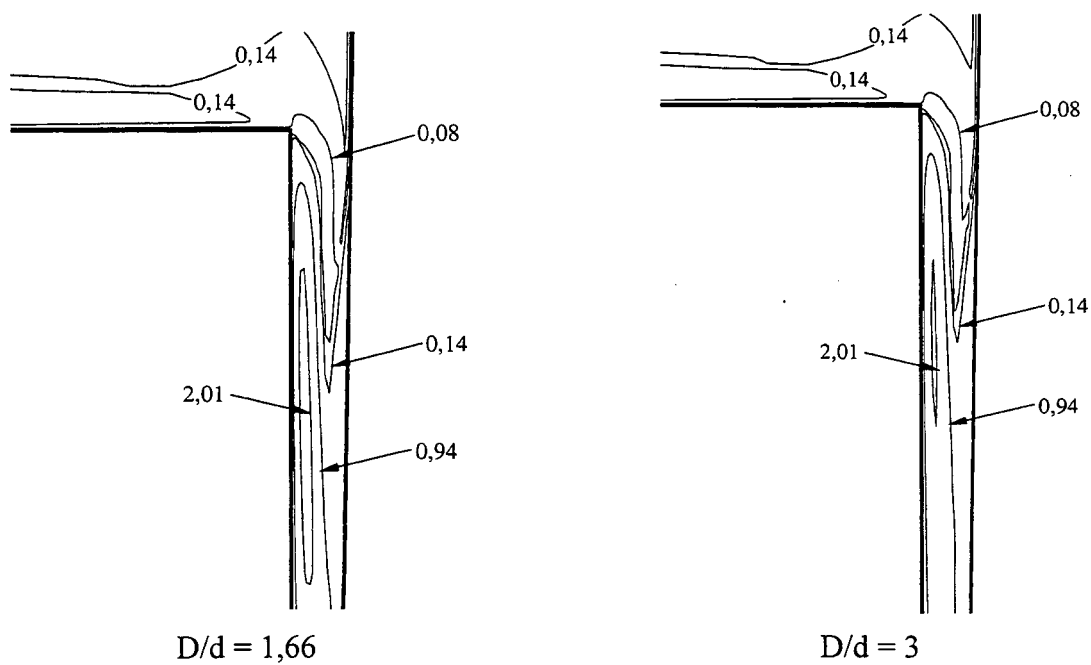


(a) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) no orifício de passagem.

Figura 5.56: Influência da relação de diâmetros D/d sobre viscosidade efetiva adimensional: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,05$ e $\alpha = 1^\circ$.

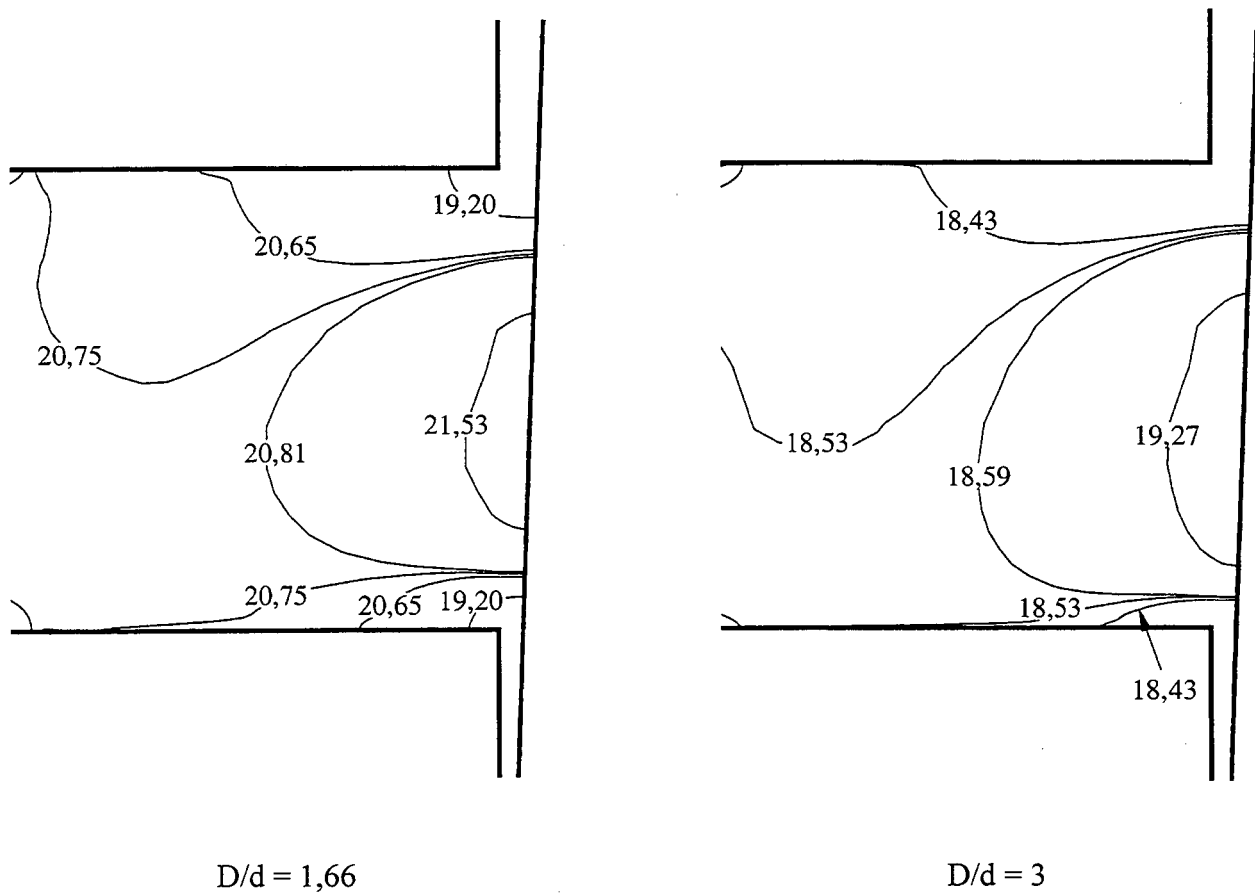


(b) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) na região com paredes mais afastadas.



(c) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) na região com paredes mais próximas.

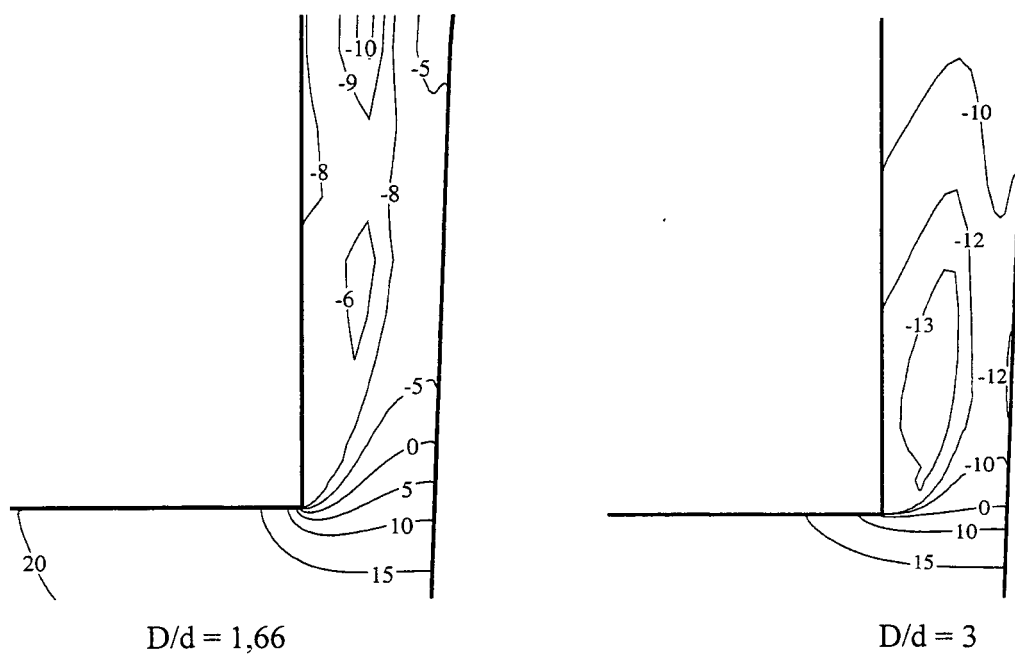
Figura 5.56: (continuação)



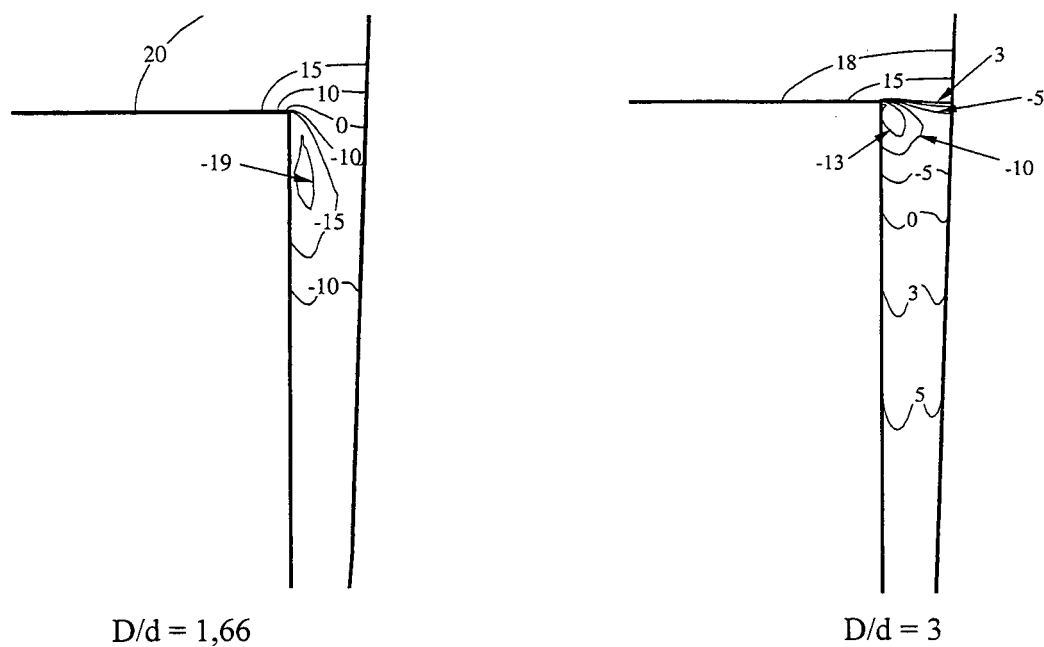
(a) Isobáricas no orifício de passagem.

Figura 5.57: Influência da relação de diâmetros D/d sobre o campo de pressão

$$P^* [= p / (1/2 \rho U_{in}^2)] :: Re = 25.000, s_c/d = 0,07 \text{ e } \alpha = 2^\circ.$$

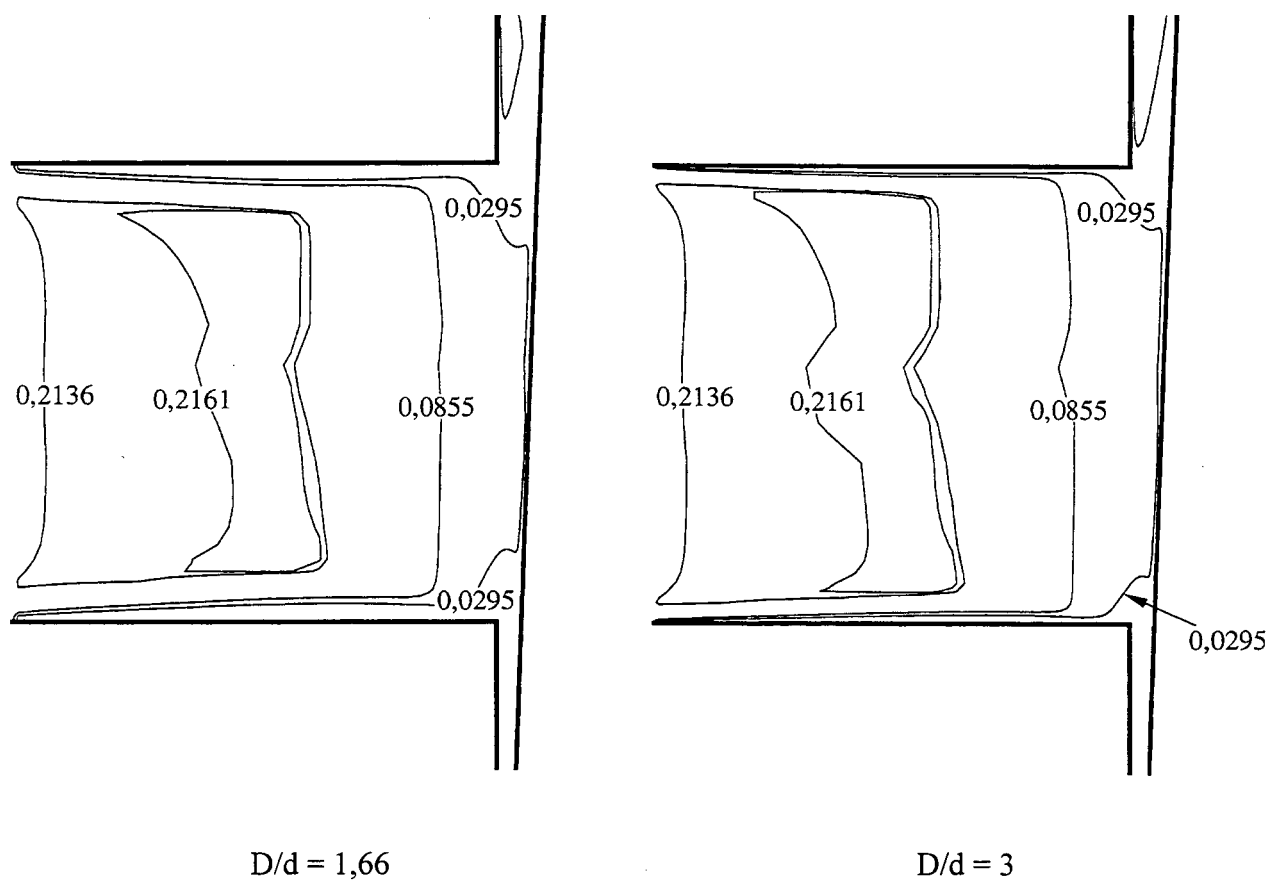


(b) Isobáricas no difusor superior.



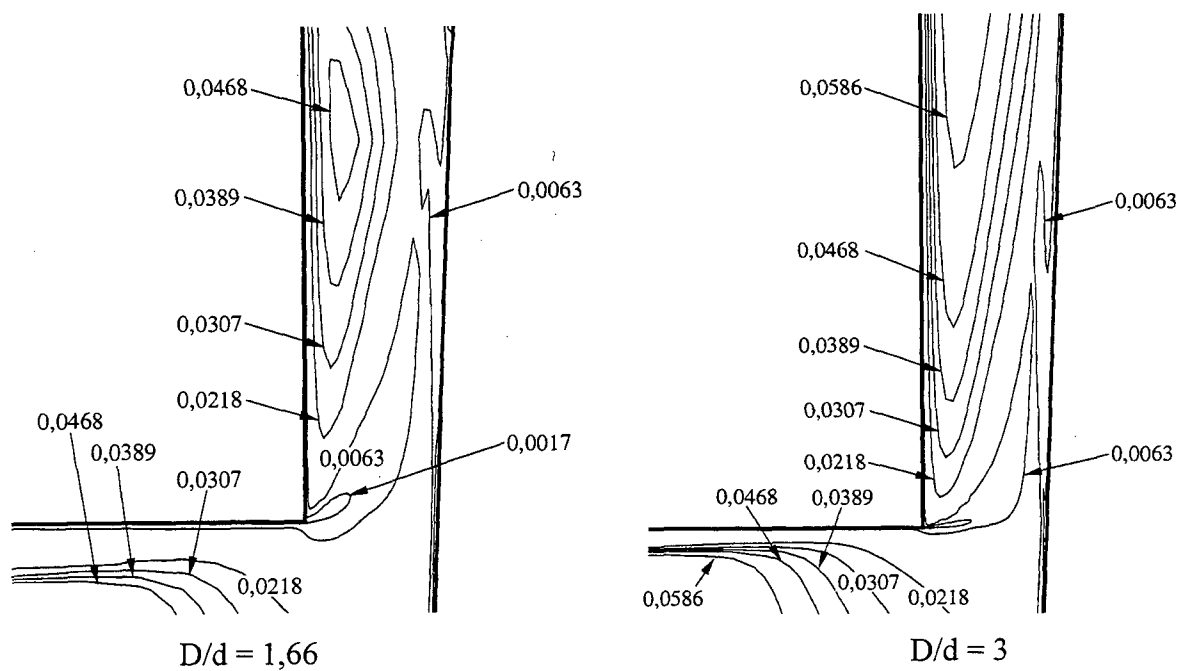
(c) Isobáricas no difusor inferior.

Figura 5.57: (continuação)

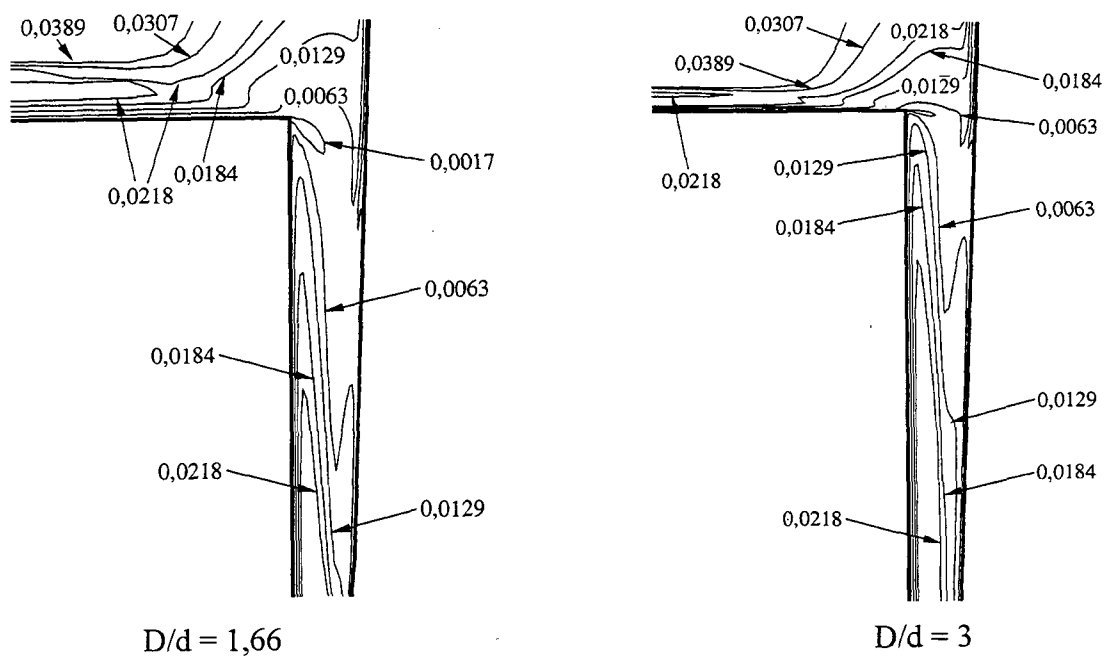


(a) Isolinhas de escalas de comprimento no orifício de passagem.

Figura 5.58: Influência da relação de diâmetros D/d sobre as escalas de comprimento da turbulência L ($= \ell/d$): $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$.

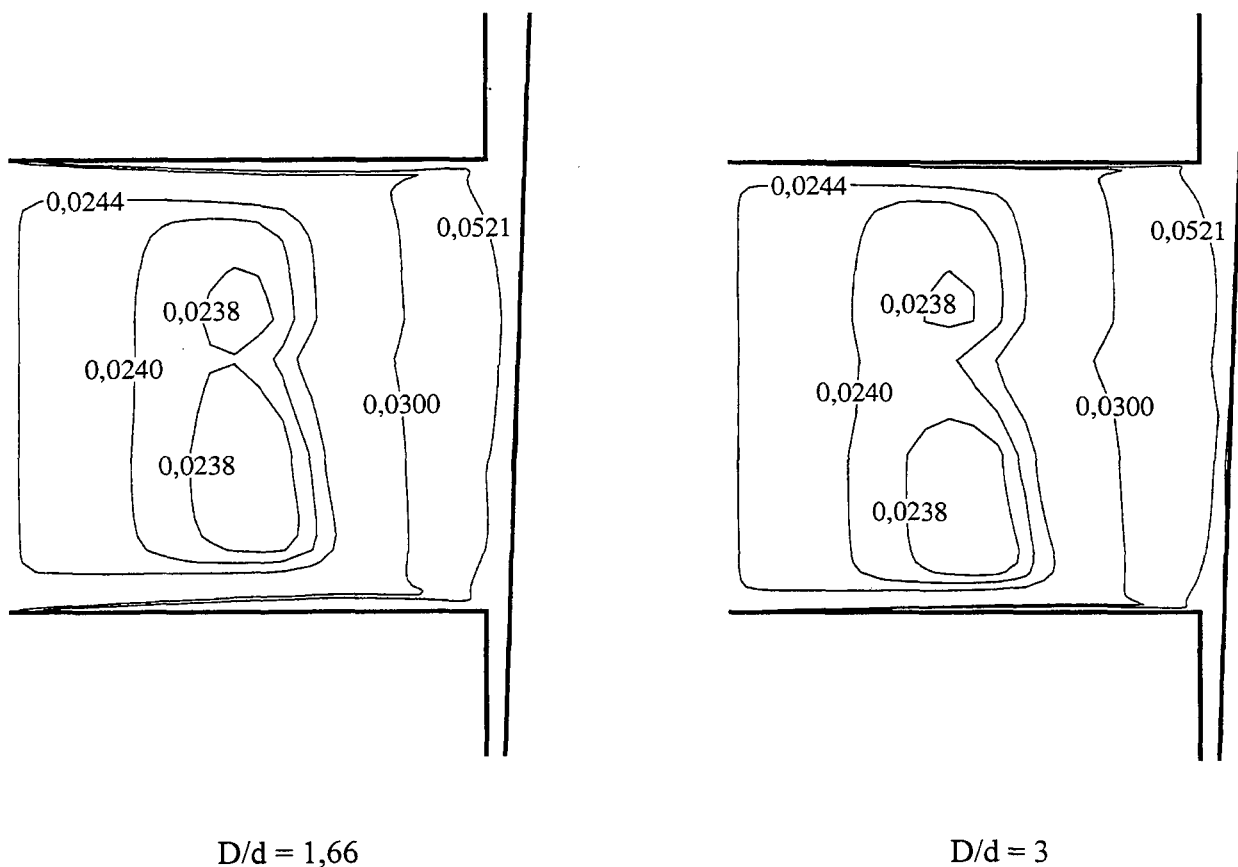


(b) Isolinhas de escalas de comprimento na região com paredes mais afastadas.



(c) Isolinhas de escalas de comprimento na região com paredes mais próximas.

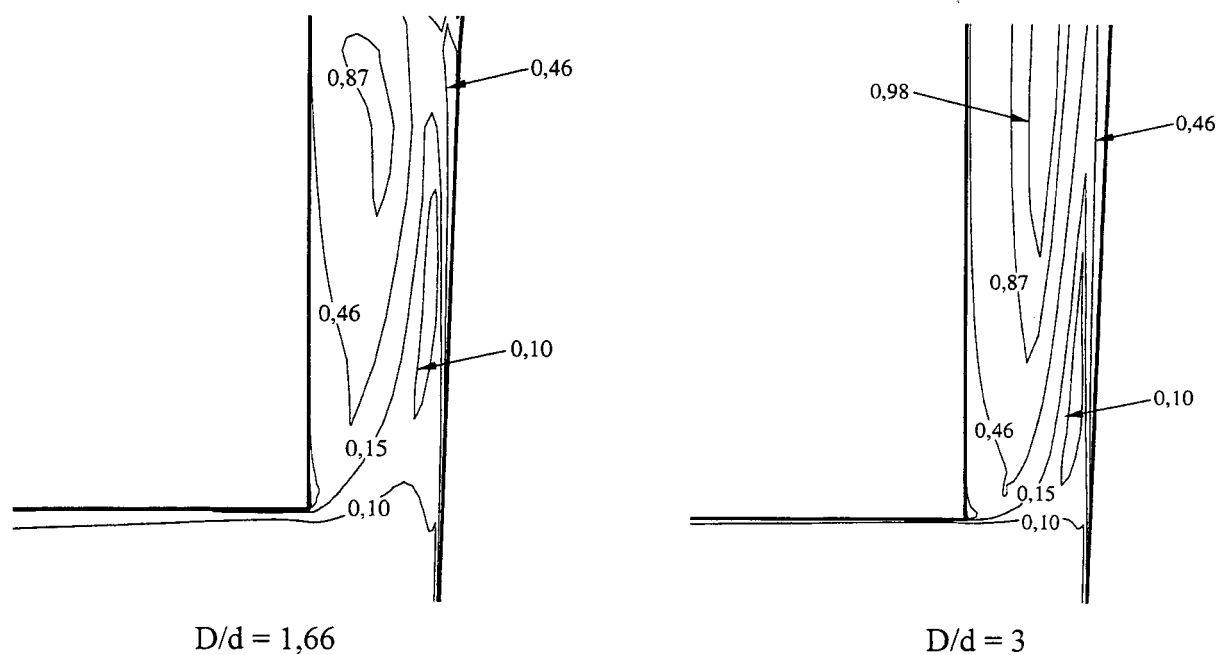
Figura 5.58: (continuação)



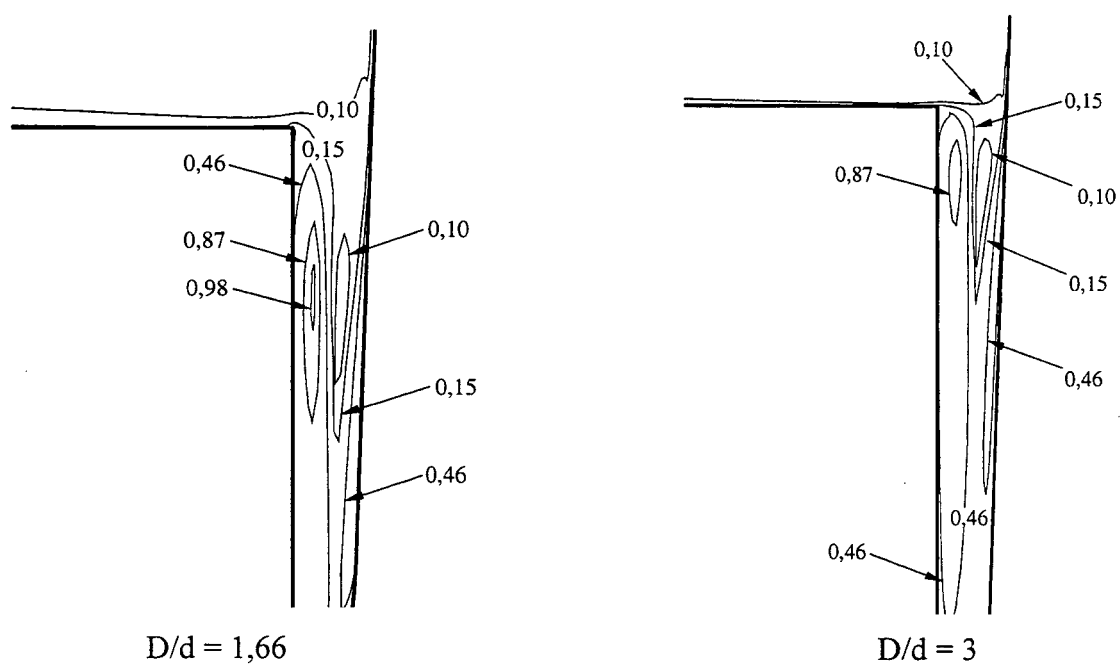
(a) Isolinhas de intensidade da turbulência no orifício de passagem.

Figura 5.59: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a intensidade da turbulência

$$I [= (2k/3)^{1/2} / U_{in}]: Re = 25.000, s_c/d = 0,07 \text{ e } \alpha = 2^\circ.$$

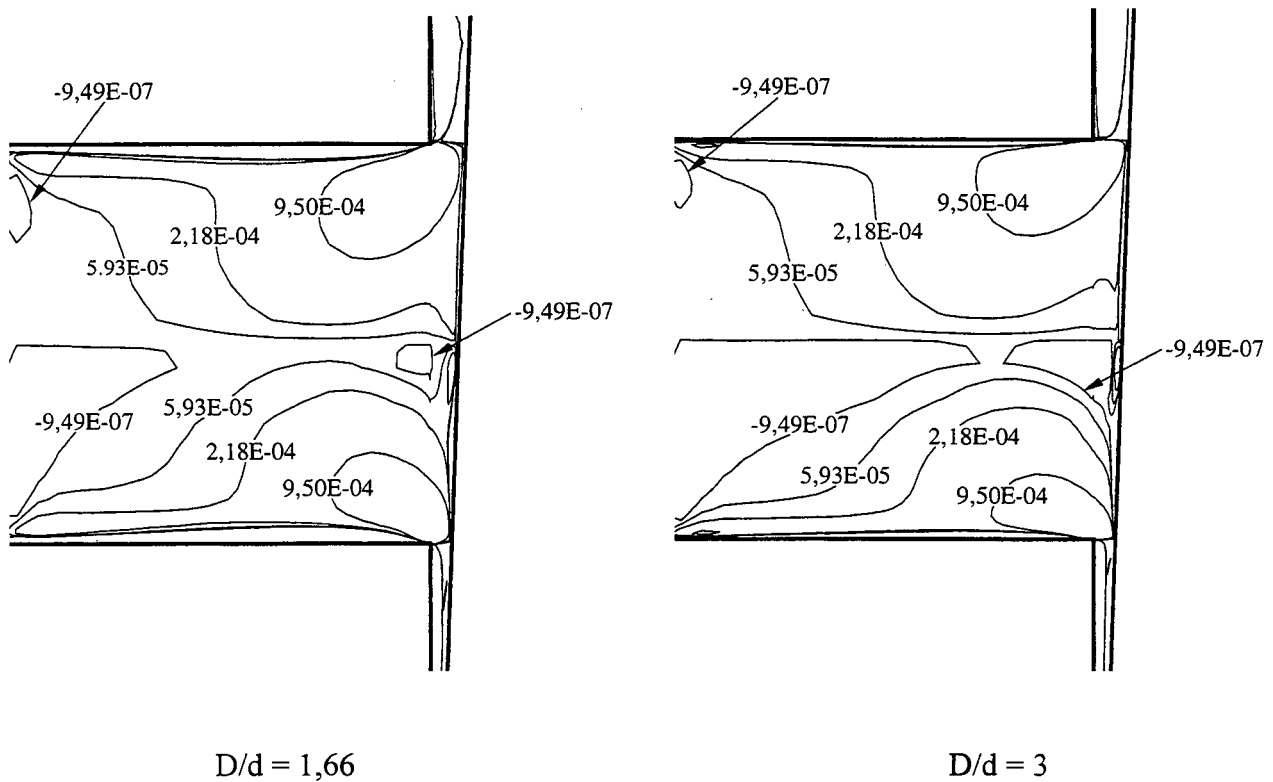


(b) Isolinhas de intensidade da turbulência na região com paredes mais afastadas.



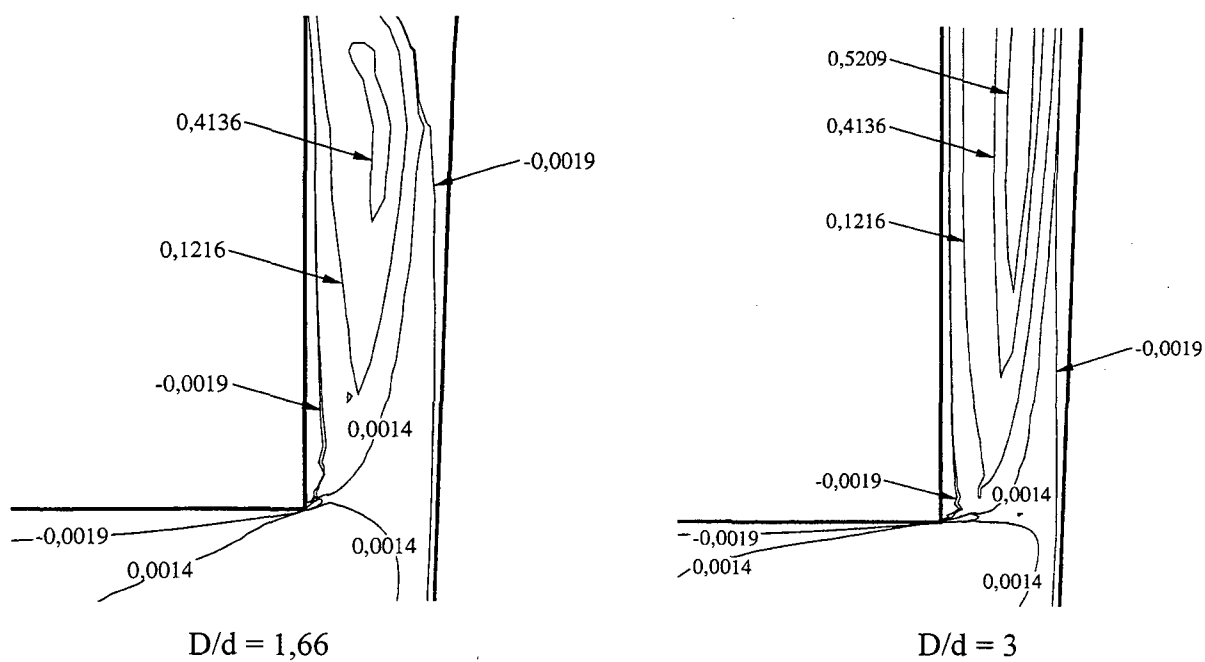
(c) Isolinhas de intensidade da turbulência na região com paredes mais próximas.

Figura 5.59: (continuação)

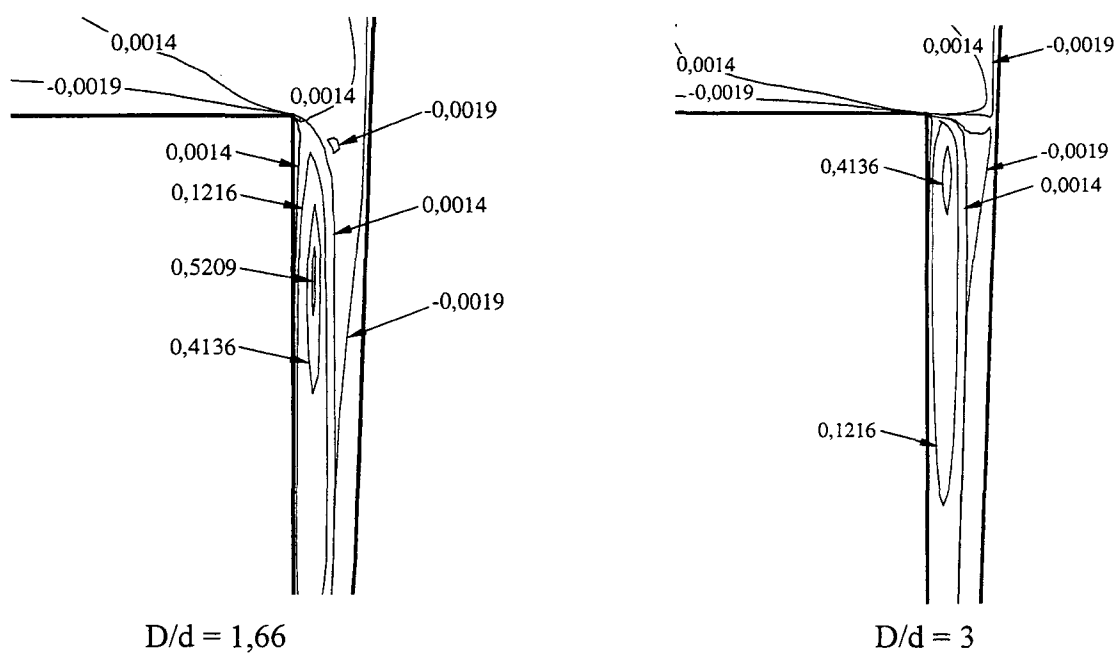


(a) Isolinhas de tensões de Reynolds no orifício de passagem.

Figura 5.60: Influência da relação de diâmetros D/d sobre a tensão de Reynolds adimensional: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$.

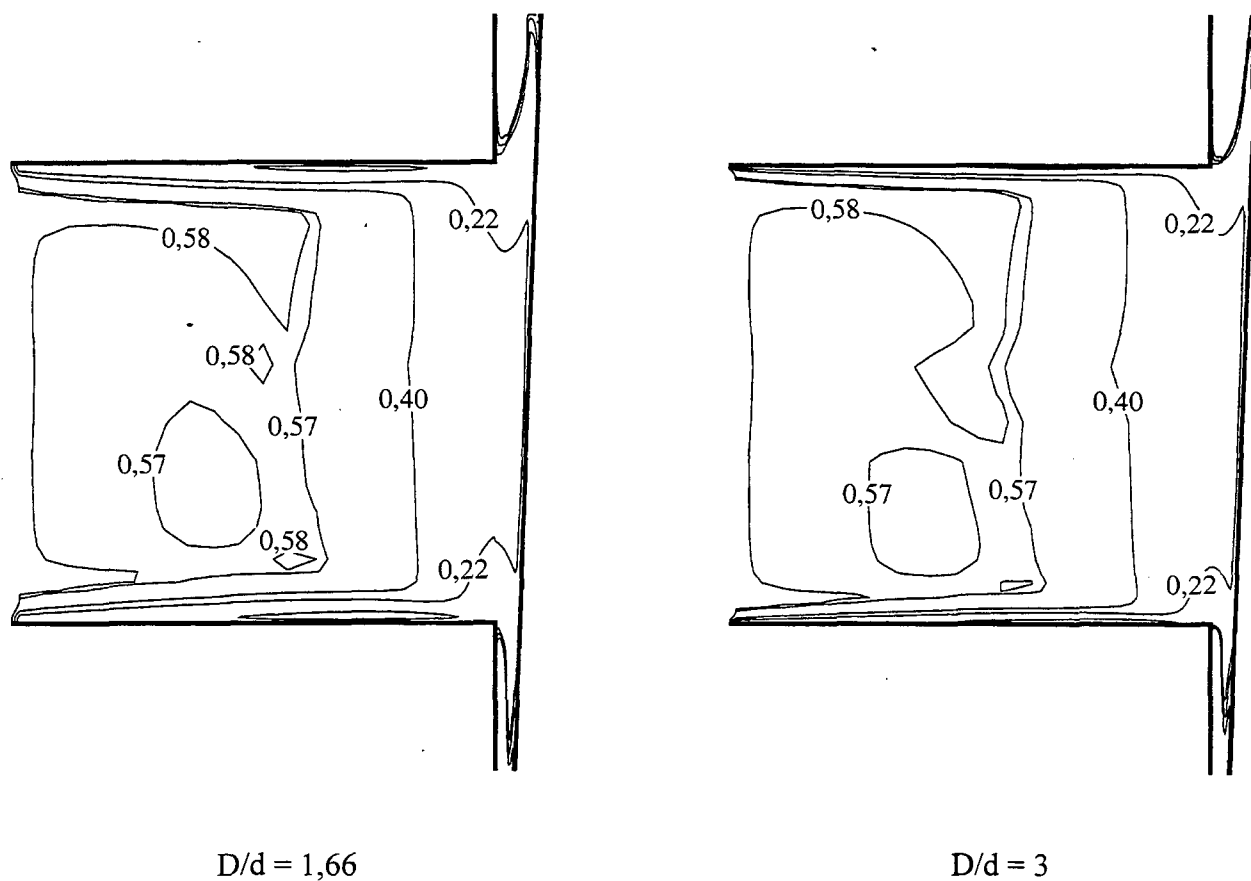


(b) Isolinhas de tensões de Reynolds na região com paredes mais afastadas.



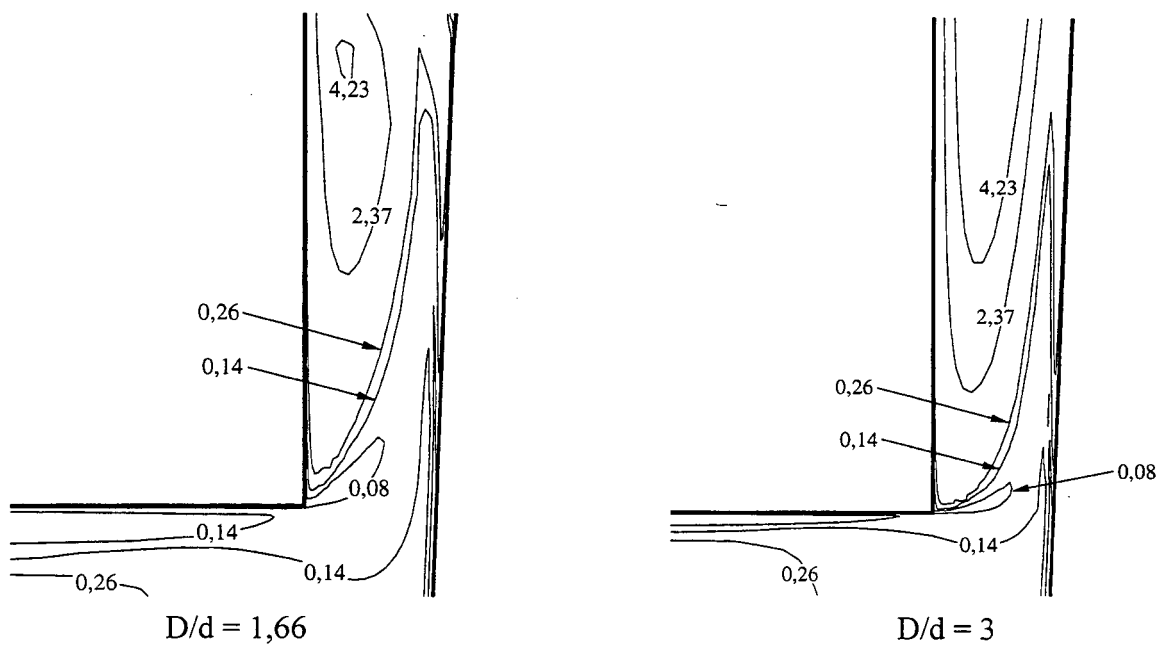
(c) Isolinhas de tensões de Reynolds na região com paredes mais próximas.

Figura 5.60: (continuação)

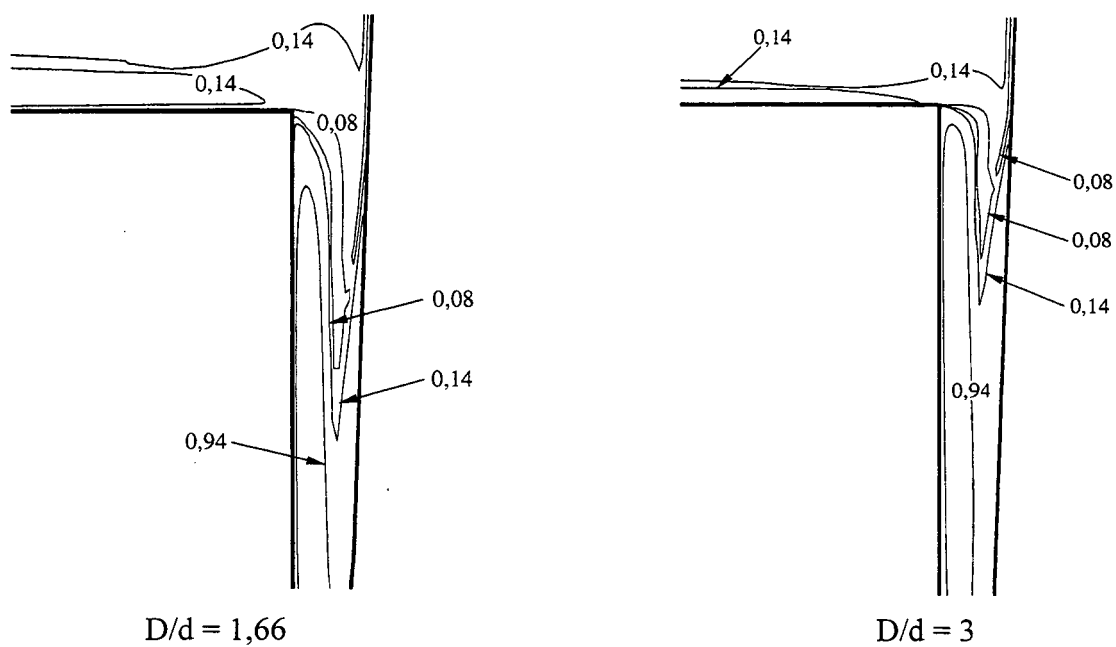


(a) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) no orifício de passagem.

Figura 5.61: Influência da relação de diâmetros D/d sobre viscosidade efetiva adimensional: $Re = 25.000$, $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$.



(b) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) na região com paredes mais afastadas.



(c) Isolinhas de viscosidade efetiva ($\times 10^3$) na região com paredes mais próximas.

Figura 5.61: (continuação)

5.6.3 Distribuição de Pressão como Função do Número de Reynolds

A influência do número de Reynolds, Re , sobre a distribuição de pressão na palheta, foi analisada através de resultados de simulações $Re = 5.000$, 25.000 e 50.000 . Para o caso de palheta paralela em relação ao assento, a investigação considerou três afastamentos adimensionais: $s/d = 0,03$, $0,05$ e $0,07$. Para o caso de palheta inclinada incluíram-se duas situações: i) afastamento $s_c/d = 0,03$ e inclinação $\alpha = 0,5^\circ$ e ii) afastamento $s_c/d = 0,07$ e inclinação $\alpha = 2^\circ$. Todas as simulações foram realizadas para a relação de diâmetros $D/d = 1,66$.

Na Figura 5.62 mostra-se o efeito da variação do número de Reynolds na distribuição de pressão adimensional $P^* [= p/(\rho u_{in}^2/2)]$ sobre a palheta paralela ao assento em três afastamentos. Como era de se esperar, independente do número de Reynolds, o nível do patamar de pressão na região de estagnação do escoamento ($r/d < 0,5$) diminui com o aumento do afastamento, como também a magnitude do pico negativo de pressão. Este comportamento pode ser melhor entendido através das linhas de corrente da Figura 5.63. O fluido ao entrar no difusor sofre uma grande restrição pela diminuição da área de escoamento e necessita assim de uma maior pressão de estagnação para fornecer a mesma vazão através do difusor. Naturalmente, a restrição acima mencionada não é função somente do afastamento entre a palheta e o assento mas também do tamanho da região de recirculação que se forma na entrada do difusor. De fato, como indicado anteriormente e mostrado também na Figura 5.63, a presença da região de recirculação reduz de forma significativa a área de passagem do escoamento na região de entrada do difusor. Com o aumento do afastamento entre a palheta e o assento, estas regiões de recirculação aumentam mas não tanto quanto o aumento do afastamento e, desta forma, a restrição ao escoamento é diminuída e o mesmo acontecendo com a pressão de estagnação.

Outro aspecto importante que pode ser visto na Figura 5.62 é a inversão da relação entre as magnitudes da pressão no patamar ($r/d < 0,5$) para os diferentes números de Reynolds à medida que o afastamento é aumentado. Por exemplo, para o menor afastamento representado na Figura 5.62(a) tanto o patamar quanto o pico negativo da pressão são mais elevados para $Re = 5.000$. Já para o caso do maior afastamento ilustrado na Figura 5.62(c) observa-se que a menor magnitude da pressão no patamar acontece justamente para $Re = 5.000$, ou seja, uma inversão da situação mostrada na Figura 5.62(a). A explicação disto pode ser dada a partir do fato de que o nível da pressão na região central da palheta é afetada tanto por efeitos viscosos como por efeitos

de inércia, similarmente ao que ocorre com as diferentes relações de diâmetro de palheta, conforme explorado na seção 5.6.2. Quando a palheta está muito próxima ao assento os efeitos viscosos são mais pronunciados e inibem os efeitos da inércia, tais como a formação da região de recirculação na entrada do difusor. À medida que o afastamento é aumentado, os efeitos viscosos diminuem gradativamente sua importância e eventualmente a região de recirculação domina o escoamento no difusor.

Como já explicado, a queda brusca da pressão na entrada do difusor deve-se à aceleração do escoamento imposta pela diminuição da área de passagem e, assim, é intensificada pela presença de regiões de recirculação na entrada do difusor. Estas regiões de recirculação aumentam em extensão com o aumento do número de Reynolds, como pode ser observado através das linhas de corrente mostradas na Figura 5.63. Observa-se que as distribuições de pressão relativas aos números de Reynolds igual a 25.000 e 50.000 são muito similares nos três afastamentos. Isto ocorre devido ao padrão do escoamento ser praticamente o mesmo nas duas situações. De fato, mesmo para o número de Reynolds igual a 5.000 a distribuição de pressão adimensional é bem semelhante às outras duas quando os afastamentos são maiores. Um detalhe interessante que aparece nas linhas de corrente da Figura 5.63 é o maior comprimento da região de recirculação para a condição de Reynolds 50.000. O impacto disto sobre a distribuição de pressão é revelado na forma de pressões menores ao longo de todo o difusor. De fato, observa-se das linhas de corrente que o aumento das regiões de recirculação devido ao aumento do número de Reynolds acontece muito mais no seu comprimento (direção radial) do que na sua altura (direção axial). O aumento do comprimento da região de recirculação Reynolds 50.000 faz com que haja um aumento da restrição ao escoamento, aumentando assim a pressão de estagnação como pode ser observado na Figura 5.62(c).

Através da Figura 5.63 nota-se que quando $s_c/d = 0,07$ a região de recirculação atinge a saída do difusor, sendo mais pronunciada para Reynolds 50.000. Esta situação, somente experimentada para a menor relação de diâmetros $D/d = 1,66$, foi tratada do ponto de vista da metodologia numérica pela extensão do domínio de solução. Para as fronteiras deste domínio estendido foi aplicada uma condição de escoamento parabólico para a fronteira perpendicular à direção radial e uma condição de pressão prescrita (neste caso a própria pressão atmosférica) para a fronteira perpendicular à direção axial. Quando usada a relação de diâmetros $D/d = 1,66$, o

domínio solução foi estendido até obter uma relação de diâmetros $D_e/d = 3$, sendo D_e o diâmetro do domínio estendido, possibilitando assim o uso da mesma malha utilizada na relação $D/d = 3$.

A Figura 5.64 mostra as distribuições de pressão em função do número de Reynolds, obtidas para a condição de palheta inclinada em duas situações de afastamentos: $s_c/d = 0,03$ e $0,07$. O comportamento da distribuição de pressão é similar ao observado para o caso bidimensional de palheta paralela. Um aspecto importante é a inversão do lado do difusor onde o pico de mínimo da pressão ocorre. Para a situação de afastamento e inclinação da Figura 5.64(a) este pico acontece no lado direito da distribuição de pressão, que corresponde à região de entrada do difusor onde as paredes estão mais afastadas. Quando o afastamento e a inclinação são aumentados, a Figura 5.64(b) mostra que o mínimo ocorre no lado oposto. Quando o afastamento é pequeno, Figura 5.64(a), a região de menor afastamento cria uma restrição tão grande que o escoamento busca a região onde as paredes estão mais afastadas. Isto provoca uma maior aceleração do escoamento e, como consequência, a queda de pressão nesta região. Quando o afastamento entre a palheta e o assento é aumentado para a condição da Figura 5.64(b), a região da entrada do difusor onde as paredes estão mais próximas provoca uma restrição não tão grande quanto no caso anterior e o fluido escoar mais facilmente, causando uma aceleração maior do que no lado do difusor onde as paredes estão mais afastadas e, desta forma, acontece ali o pico maior de pressão negativa.

Os campos das propriedades do escoamento são de grande valia para a compreensão do fenômeno e complementam a discussão anterior realizada com base na distribuição de pressão adimensional sobre a palheta. A influência do número de Reynolds sobre o escoamento é analisado em três condições de afastamento entre palheta e assento: $s_c/d = 0,03$; $0,05$ e $0,07$. Por uma questão de concisão, somente são apresentados resultados para a condição de palheta paralela ao assento. Deve-se ter em mente que todas as propriedades aqui apresentadas são adimensionais, conforme adimensionalização indicada na seção 5.2.

Inicialmente, nas Figuras 5.65 a 5.69 são analisadas quantidades relacionadas à turbulência do escoamento. Nas Figuras 5.65(a), (b) e (c) observa-se que as escalas de comprimento aumentam com o aumento do afastamento, devido à menor dissipação viscosa da turbulência e também à sua maior geração devido a maiores taxas de deformação do escoamento, decorrentes da maior região de recirculação. Focando a atenção no número de Reynolds, verifica-se nas figuras que o seu aumento origina um pequeno aumento das escalas de comprimento, mais

visível na região de recirculação. Isto está em consonância com o aumento da região de recirculação, ocasionado pelo aumento do número de Reynolds, que provoca maiores taxas de deformação do escoamento.

As Figuras 5.66 e 5.67 mostram a influência do número de Reynolds sobre a intensidade da turbulência e sobre a tensão de Reynolds adimensional. De forma geral os resultados estão em linha com a análise do parágrafo anterior, mostrando que as diferenças são principalmente provocadas pelos diferentes tamanhos da região de recirculação na entrada do difusor. Como o padrão dos escoamentos nas duas condições de número de Reynolds se assemelha mais na situação de afastamento mais elevado, observa-se que os campos destas propriedades também tornam-se mais similares.

Isolinhas para a relação μ_t/μ são apresentadas na Figura 5.68. A figura mostra de forma clara o aumento da importância do transporte turbulento em relação ao transporte molecular na transferência de quantidade de movimento, quando o número de Reynolds é aumentado.

Um outro resultado interessante relacionado à viscosidade é apresentado na Figura 5.69 na forma de isolinhas de viscosidade efetiva ($\mu_e^* = \mu^* + \mu_t^*$). Devido à forma pela qual as equações foram adimensionalizadas, pode-se imaginar que os escoamentos para $Re = 5.000$ e 50.000 são dois escoamentos cujas velocidades na entrada do orifício de passagem são iguais a 1, mas cujas viscosidades moleculares são diferentes ($\mu = 1/Re$). Desta forma, o aumento do número de Reynolds nas simulações tem o efeito de diminuir o valor da viscosidade molecular na equação de transporte. Observa-se que de fato nas regiões onde os níveis da viscosidade turbulenta são baixos (por exemplo, no orifício de passagem) a viscosidade efetiva do escoamento é maior para os menores números de Reynolds. Na região de recirculação, onde os níveis de turbulência são elevados e crescem com o número de Reynolds, a viscosidade efetiva é maior para o maior valor de Re .

A influência do número de Reynolds sobre o campo de pressão, mostrada na Figura 5.70, está em concordância com os aspectos já discutidos para as distribuições de pressão adimensional da Figura 5.62.

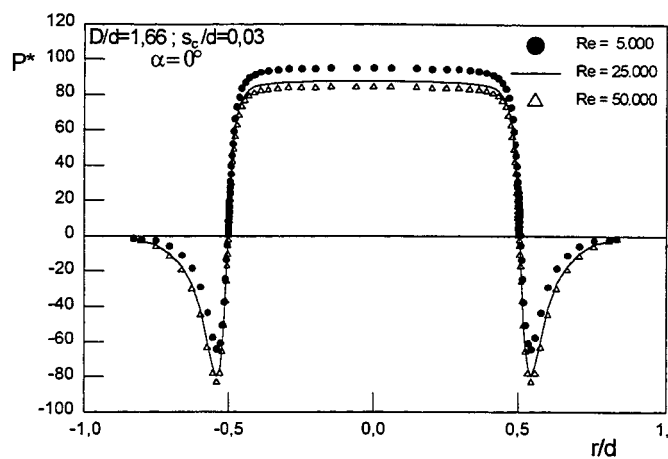
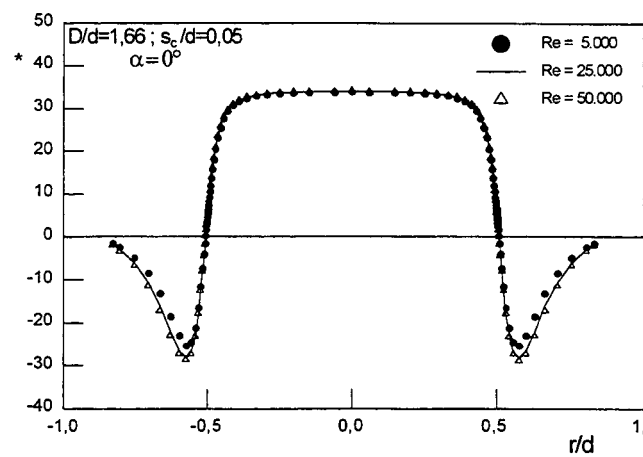
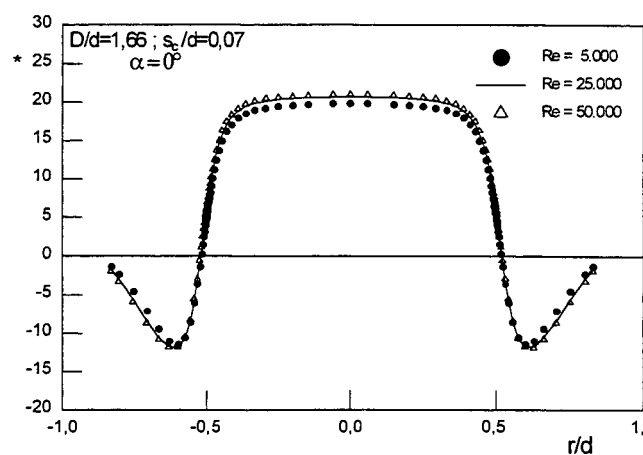
(a) $s_c/d = 0,03$ (b) $s_c/d = 0,05$ (c) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.62: Influência do número de Reynolds sobre a distribuição de pressão na palheta, para $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

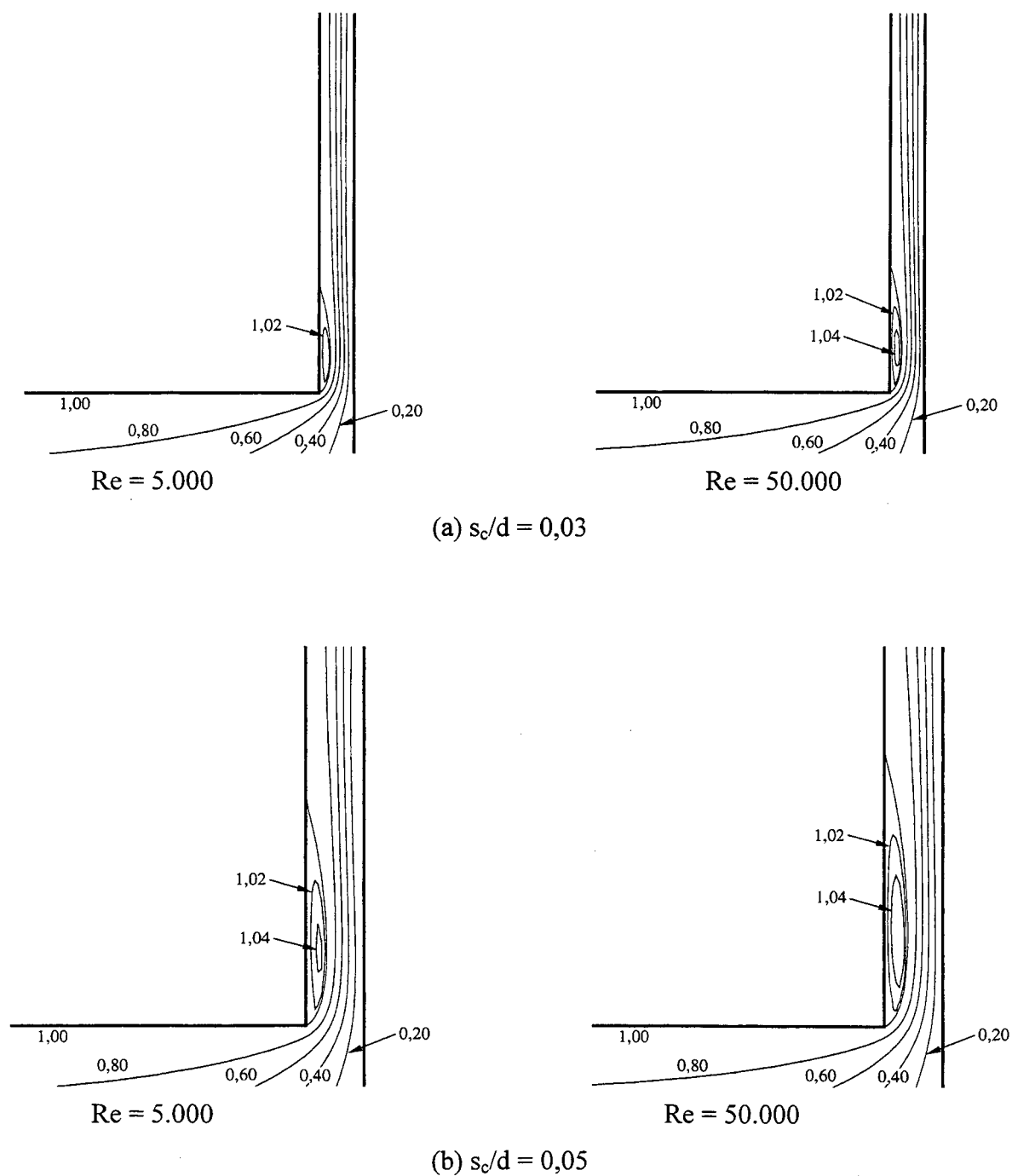
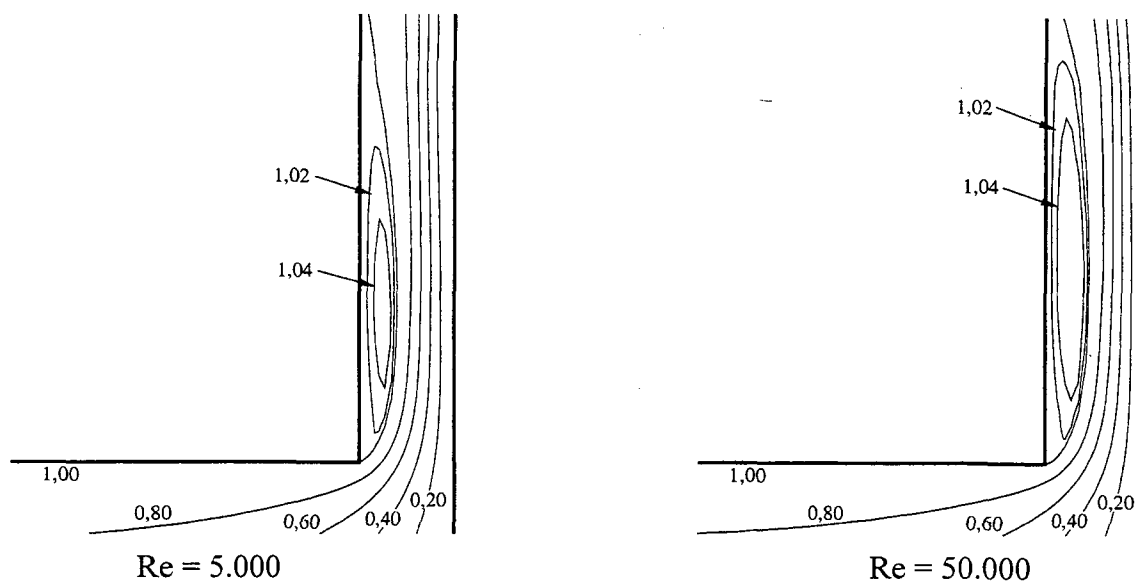


Figura 5.63: Influência do número de Reynolds sobre as linhas de corrente;
 $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.



(c) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.63: (continuação)

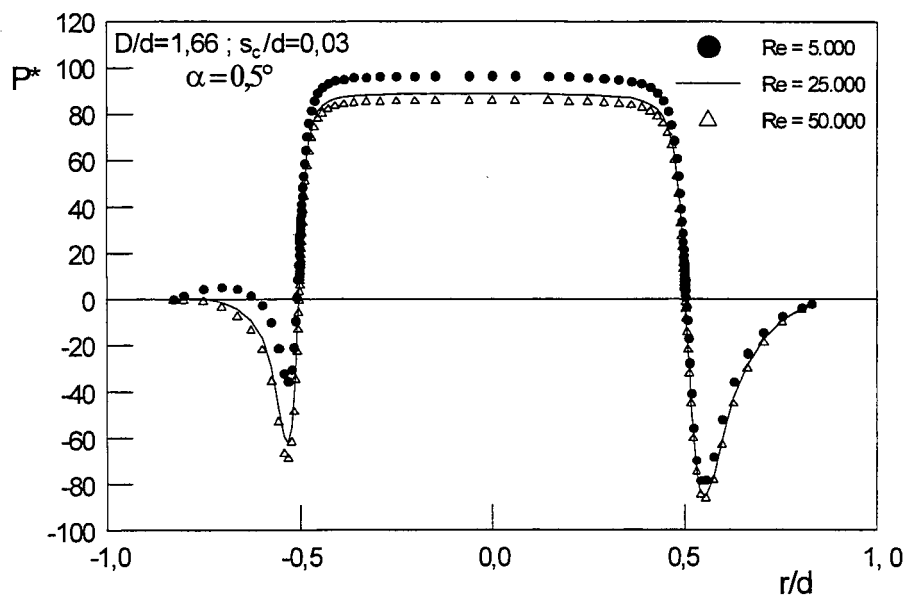
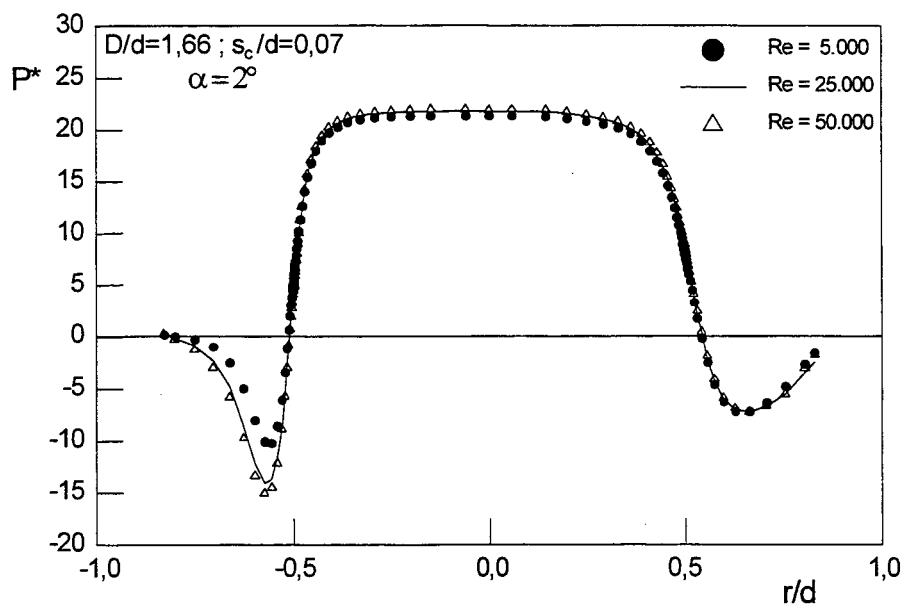
(a) $s_c/d = 0,03$ e $\alpha = 0,5^\circ$.(b) $s_c/d = 0,07$ e $\alpha = 2^\circ$.

Figura 5.64: Influência do número de Reynolds sobre a distribuição de pressão na palheta inclinada; $D/d = 1,66$.

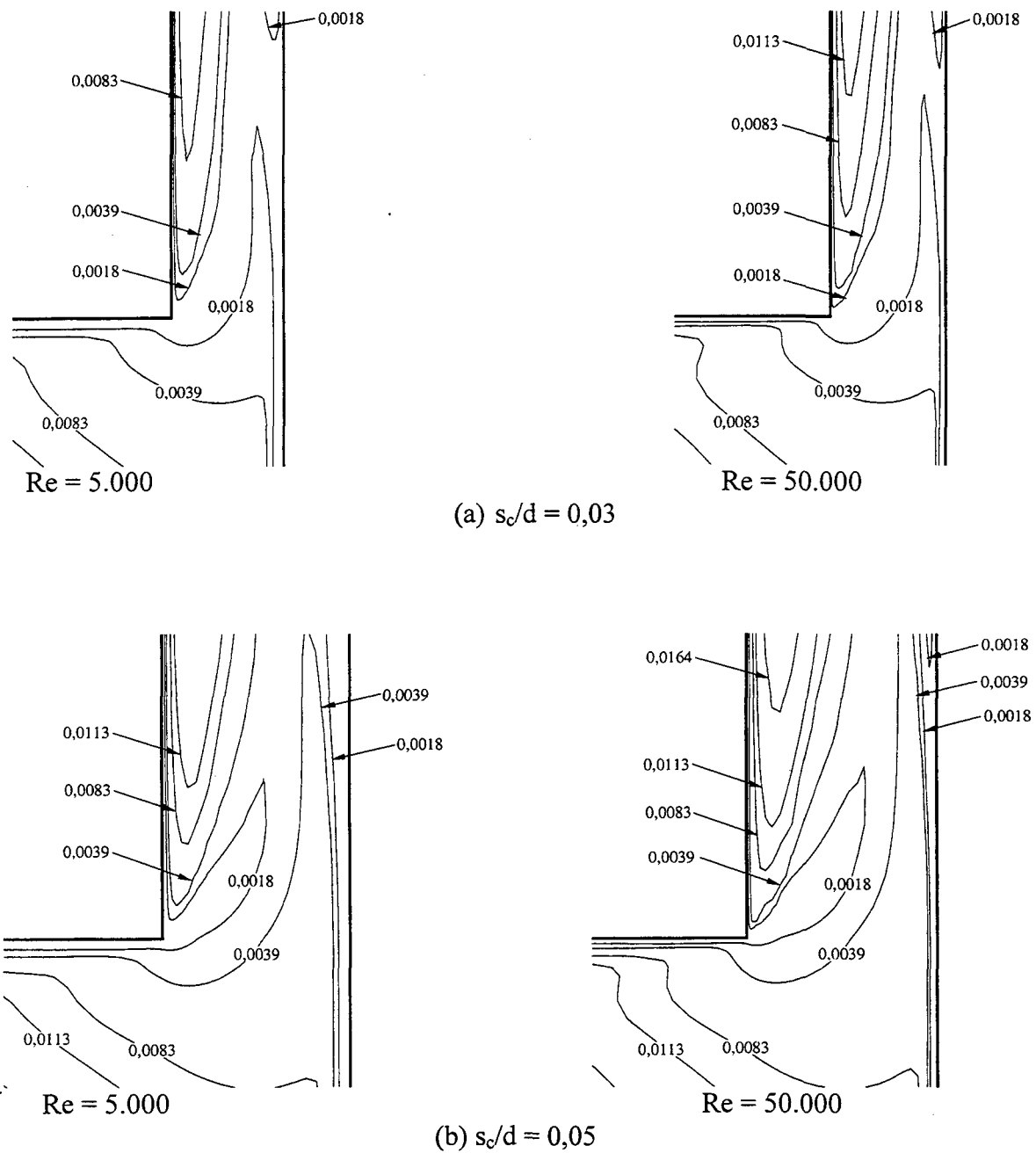
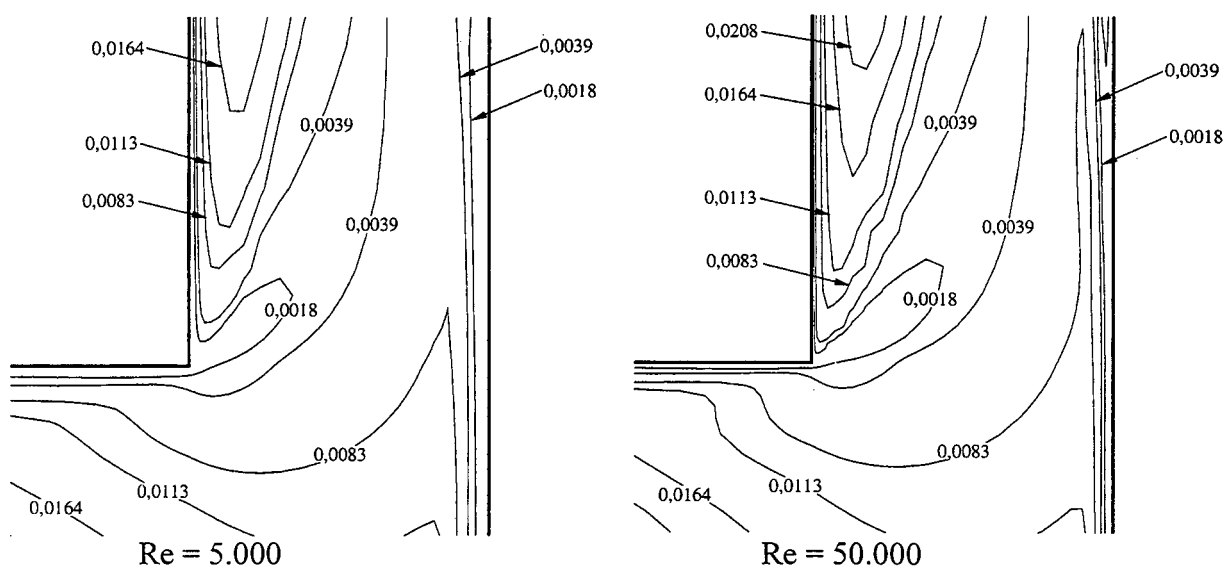


Figura 5.65: Influência do número de Reynolds sobre as escalas de comprimento;
 $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.



(c) $s_c/d = 0,07$

Figura 5.65: (continuação)

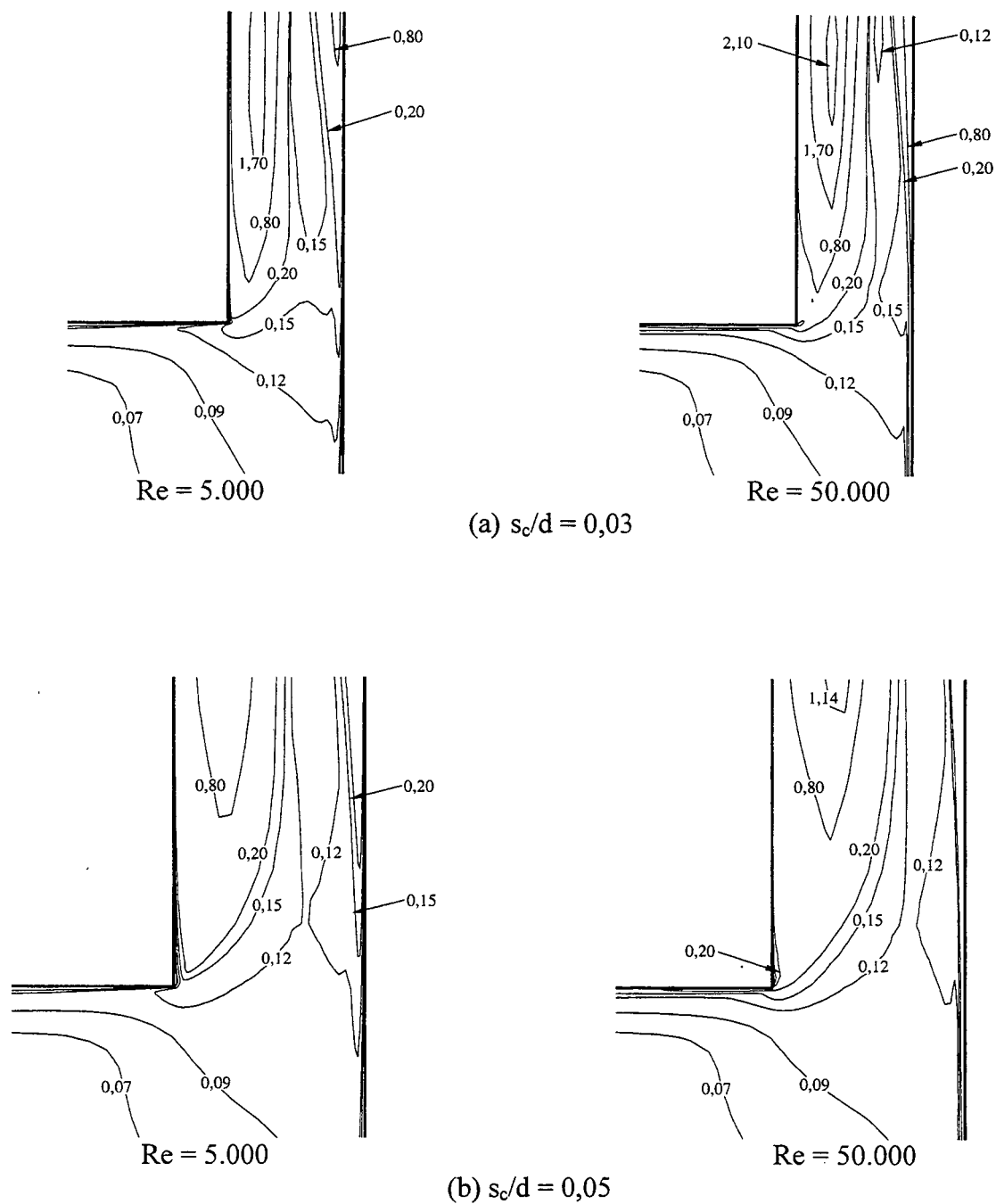


Figura 5.66: Influência do número de Reynolds sobre a intensidade da turbulência, $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

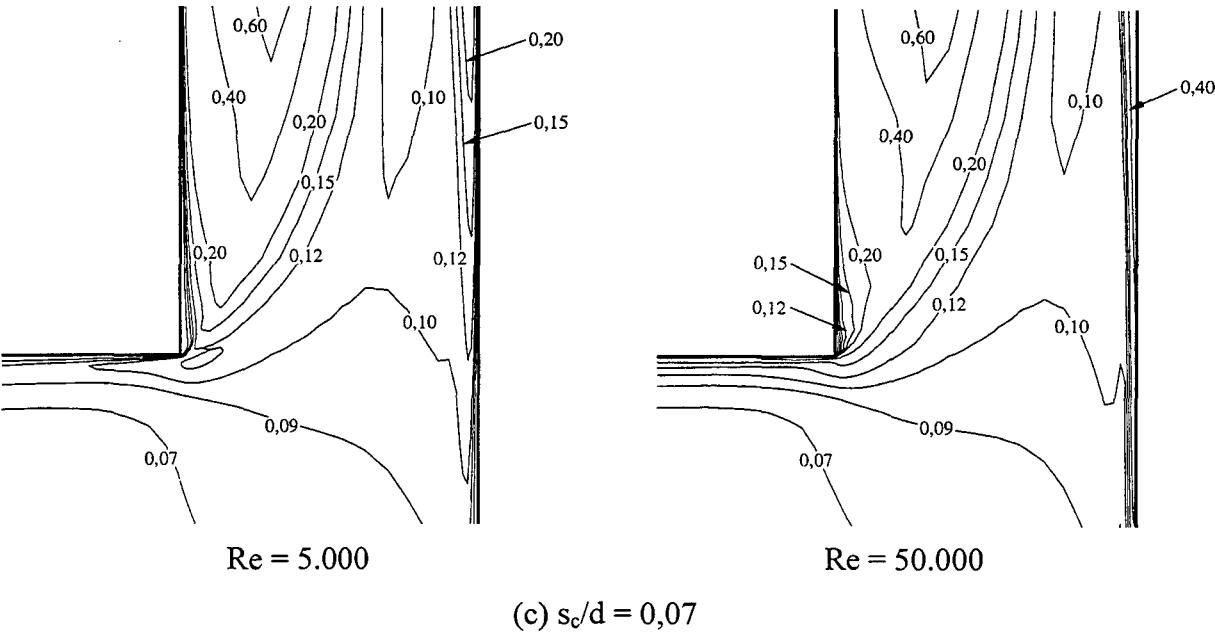


Figura 5.66: (continuação)

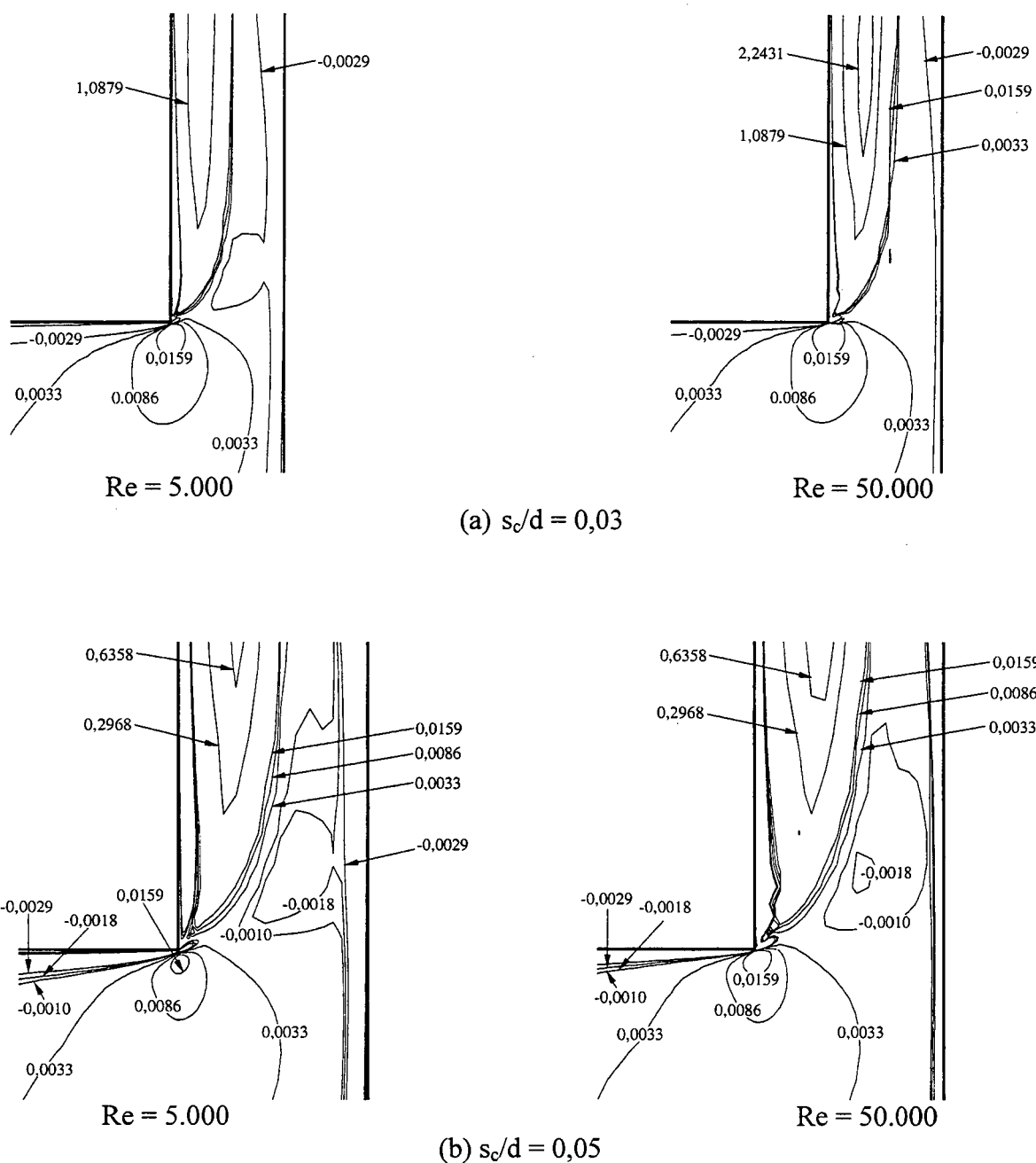


Figura 5.67: Influência do número de Reynolds sobre as tensões de Reynolds adimensionais; $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

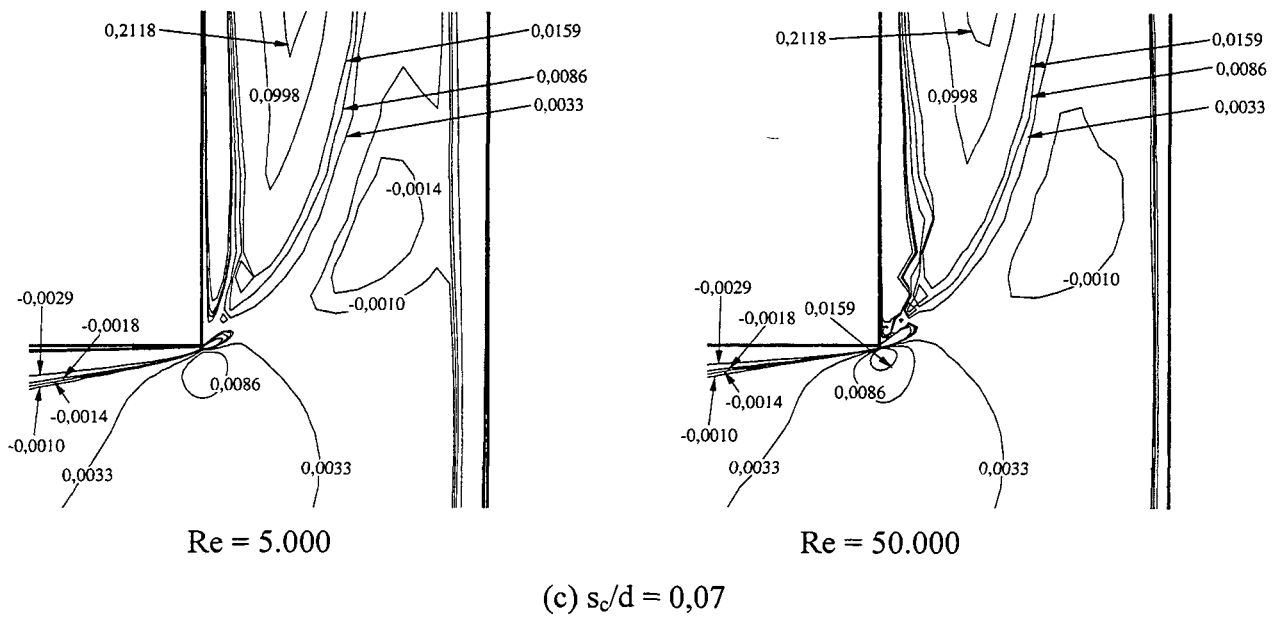


Figura 5.67: (continuação)

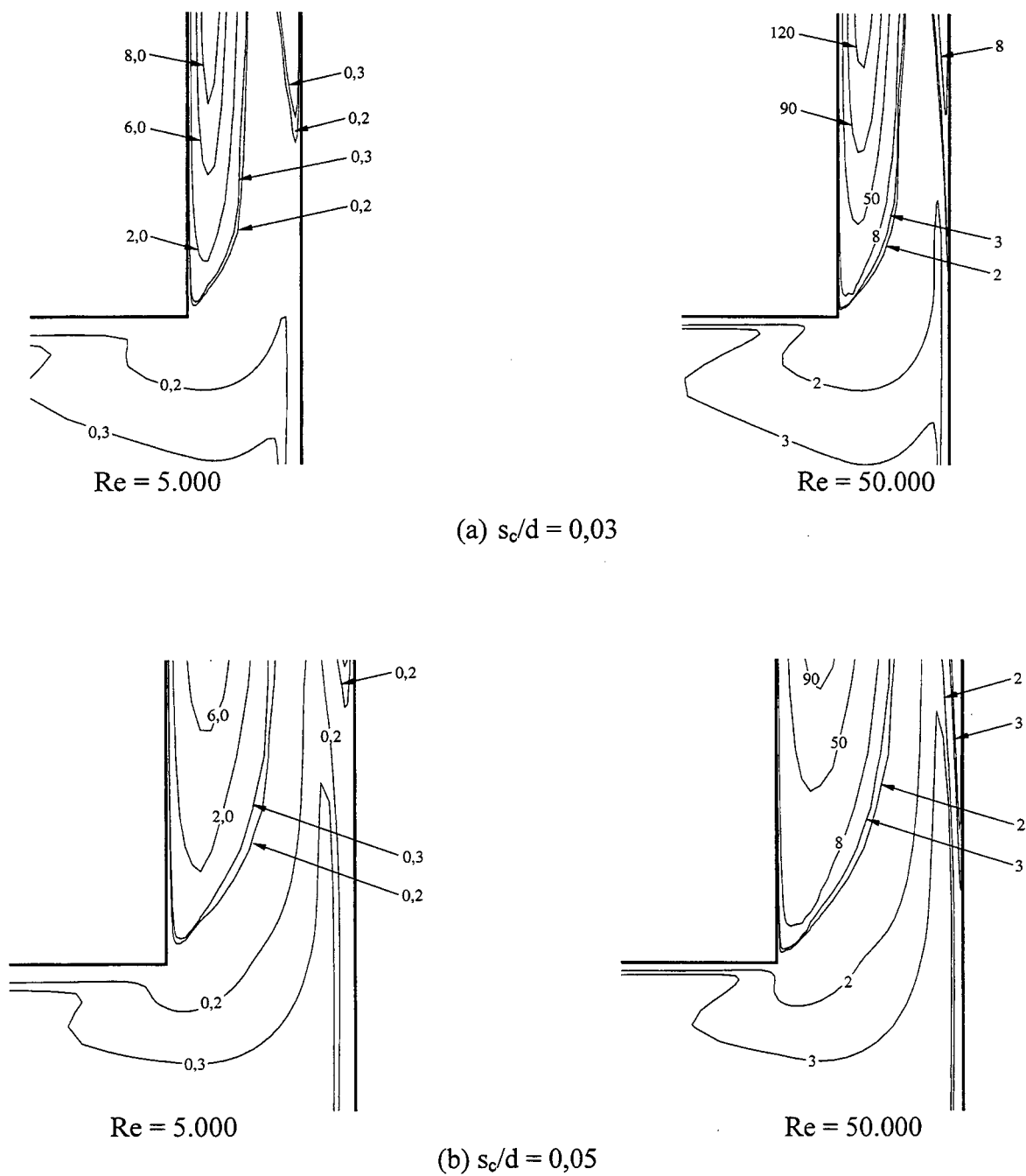


Figura 5.68: Influência do número de Reynolds sobre a relação μ_t/μ ,
 $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

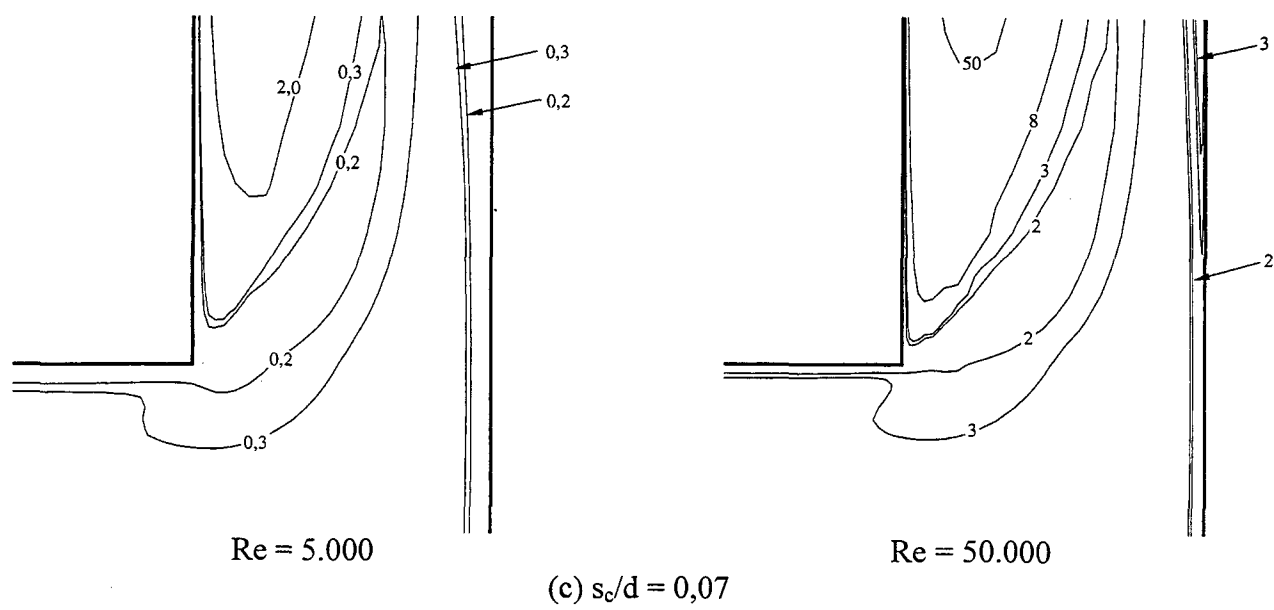


Figura 5.68: (continuação)

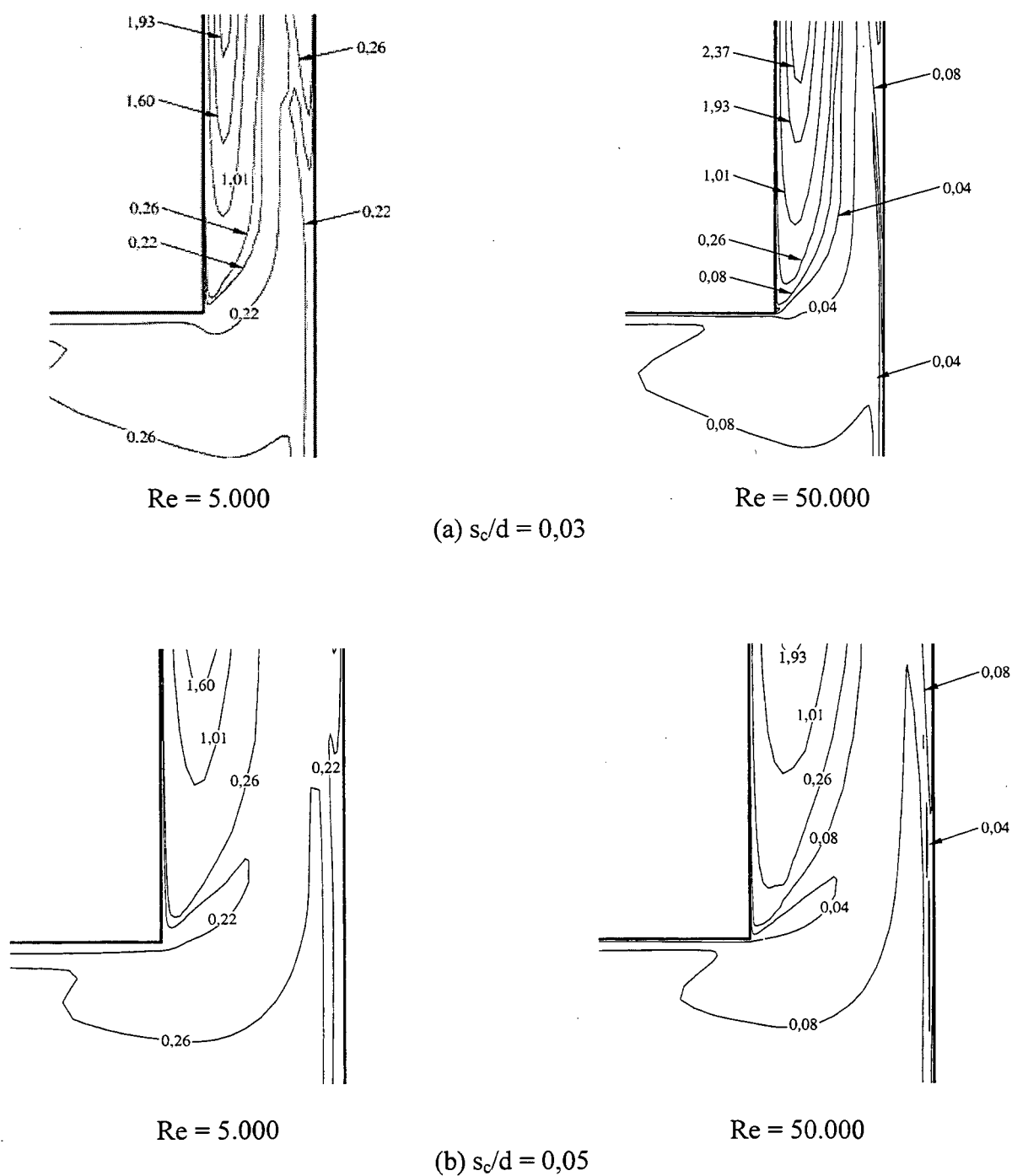


Figura 5.69: Influência do número de Reynolds sobre a viscosidade efetiva ($\times 10^3$), $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

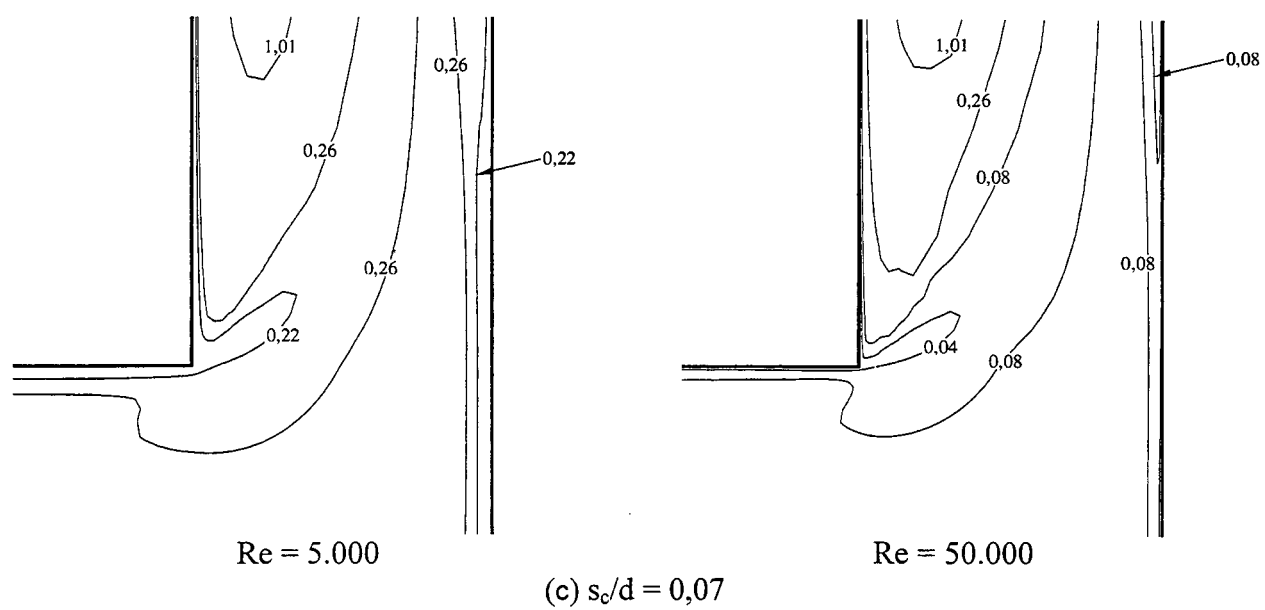


Figura 5.69: (continuação)

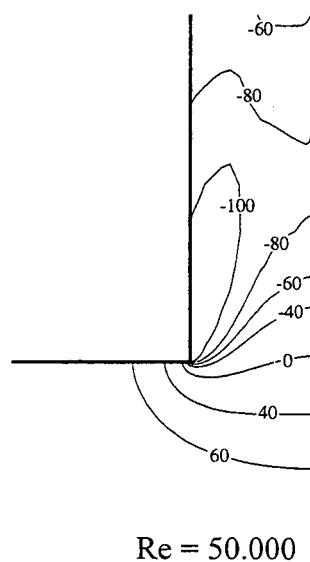
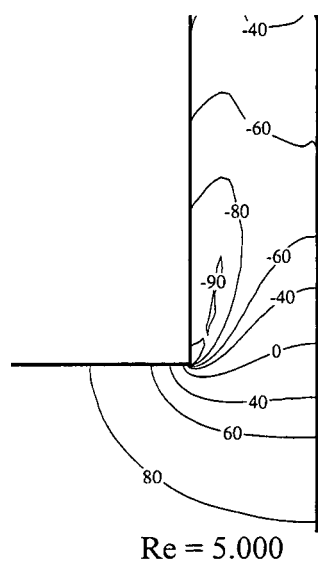
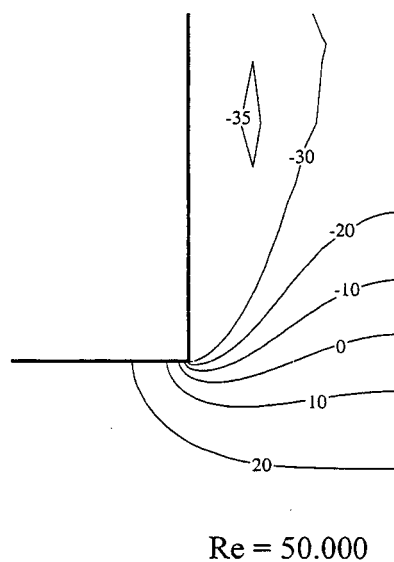
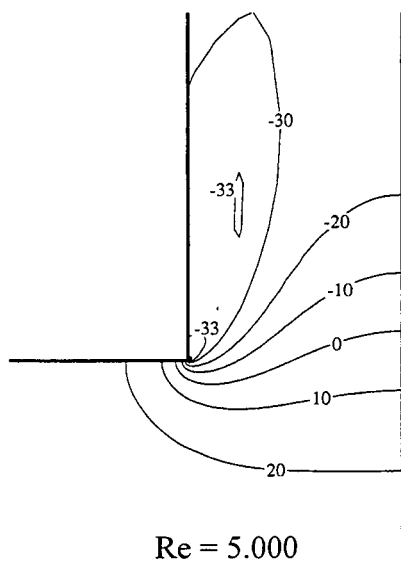
(a) $s_c/d = 0,03$ (b) $s_c/d = 0,05$

Figura 5.70: Influência do número de Reynolds sobre o campo de pressão;
 $D/d = 1,66$ e $\alpha = 0^\circ$.

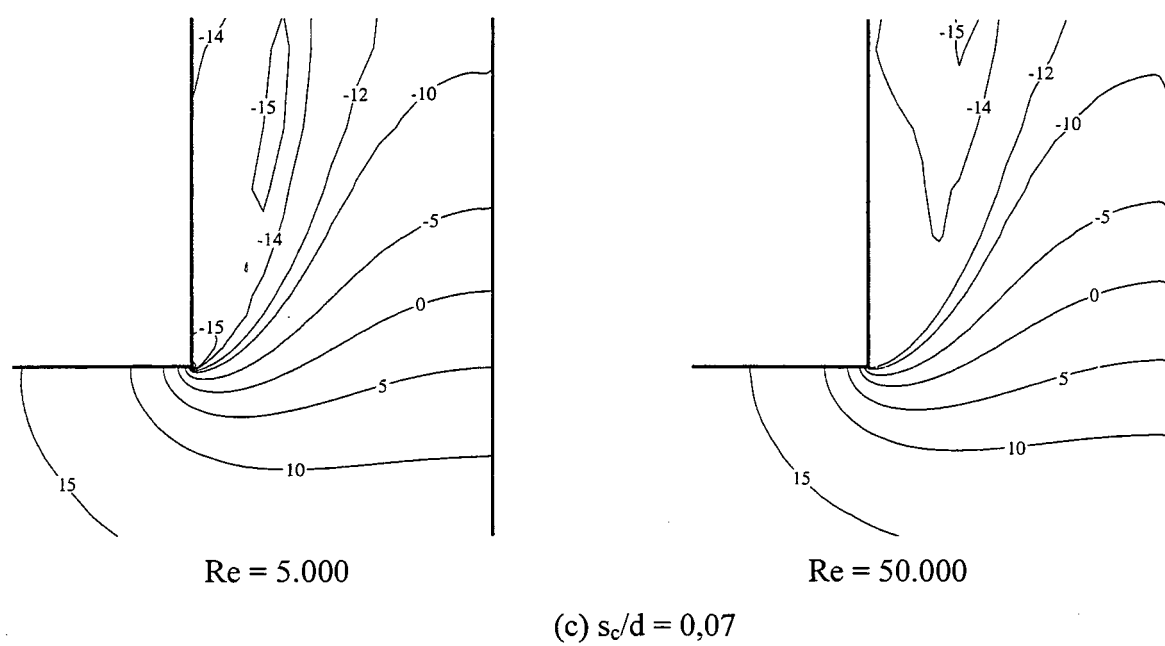


Figura 5.70: (continuação)

5.6.4 Força Resultante na Palheta em Função de sua Inclinação

A força resultante do escoamento sobre a palheta é um parâmetro muito importante por ser responsável pela abertura da válvula e é uma função das condições do escoamento (tais como número de Reynolds, Re , relação de diâmetros, D/d , e afastamento entre a palheta e o assento, s/d , entre outros). Como visto para algumas distribuições de pressão ao longo deste capítulo, a aceleração do escoamento no difusor pode originar regiões sobre a superfície da palheta com pressão menor do que a pressão do ambiente de descarga. Dependendo das magnitudes dessas pressões negativas e das áreas da palheta onde elas atuam, a força resultante pode atingir valores negativos, fazendo com que a palheta seja na verdade puxada de encontro ao assento. Este fenômeno em uma situação prática representaria a queda da eficiência do sistema devido à instabilidade no movimento de abertura da válvula.

Para observar o efeito da inclinação da palheta sobre a força resultante em sua superfície, na Figura 5.71 mostram-se essas forças para três afastamentos ($s_c/d = 0,03; 0,05$ e $0,07$) e ângulos de inclinação que variam entre 0 e 2° . Na mesma figura comparam-se também as forças de acordo com a relação de diâmetros adotada: $D/d = 1,66$ e 3 .

Observa-se para as duas relações de diâmetros que a força aumenta com o aumento do ângulo de inclinação, sendo este aumento mais acentuado para a maior relação $D/d = 3$. Deve-se notar também que o aumento de força para a relação $D/d = 1,66$ é mais suave e quase linear. Além disto, em todas as situações de afastamento e inclinação a força sobre a palheta resulta sempre positiva para $D/d = 1,66$. Como mostram as Figuras 5.71(b) e (c), isto não acontece para a maior relação de diâmetros nos afastamentos mais elevados. Nessas situações, quando as inclinações são pequenas o escoamento cria um campo de pressão negativo na região do difusor, ocasionando uma força de atração sobre a palheta. O aumento da inclinação diminui esta força de atração e eventualmente passa a ser uma força de repulsão nas maiores inclinações. Comparando as Figuras 5.71(b) e (c) nota-se também que para o maior afastamento, a força de atração é maior, necessitando-se de um ângulo de inclinação maior para atingir uma força de repulsão.

Finalmente, é observado que para o menor afastamento, a força obtida com a relação de diâmetros $D/d = 3$ é maior do que aquela para a relação $D/d = 1,66$, mas torna-se o inverso com o aumento do afastamento. No caso dos menores afastamentos, este comportamento pode ser atribuído à maior estagnação originada pelos efeitos viscosos na palheta com maior área de

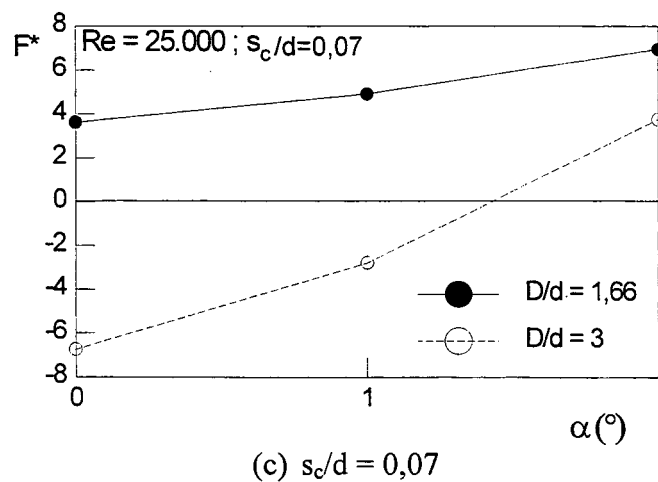
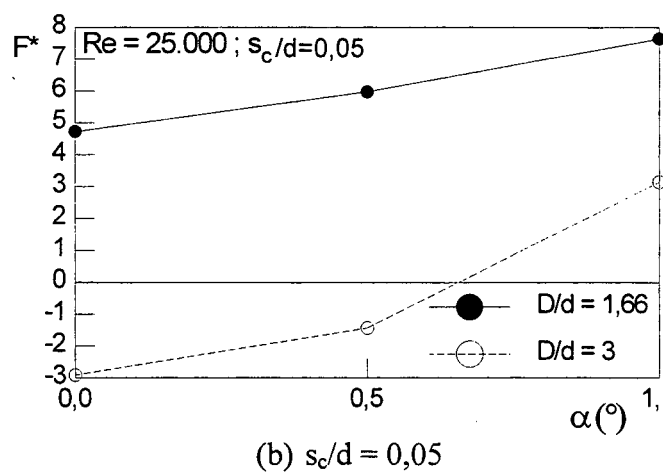
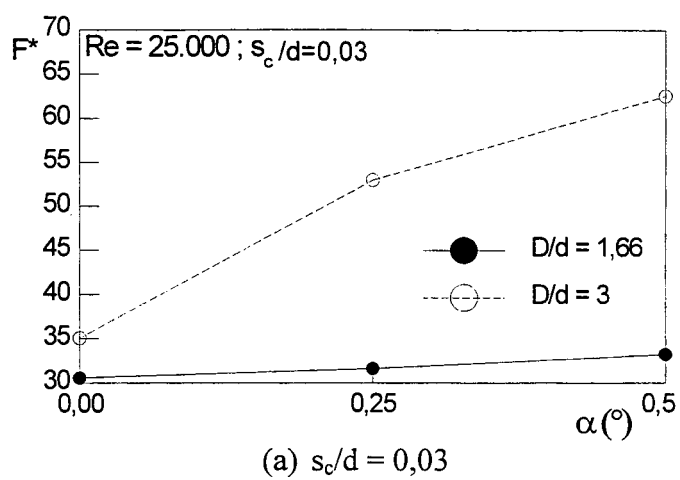


Figura 5.71: Influência do ângulo de inclinação sobre a força adimensional resultante na palheta..

recobrimento ($D/d = 3$). À medida que o afastamento é aumentado as regiões de recirculação ditam a distribuição de pressão negativa. A área onde as pressões negativas surgem é maior para a relação de diâmetros $D/d = 3$, como observado na Figura 5.42. Além disto, pode ser notado também naquela figura que a pressão na região central da palheta ($r/d < 0,5$) é menor para a relação $D/d = 3$.

5.7 Conclusões

O presente capítulo apresentou uma análise detalhada do escoamento turbulento através de difusores radiais com o disco frontal inclinado, tomando como base resultados de distribuição de pressão sobre o disco frontal e de campos de propriedades do escoamento (linhas de corrente, vetores velocidade, escalas de comprimento, intensidade da turbulência, tensões de Reynolds, etc).

Inicialmente, após uma etapa de testes para a validação da solução numérica, foi realizada uma análise comparativa de três modelos de turbulência: i) o modelo $k-\epsilon$ de Launder e Sharma (1974); ii) o modelo RNG $k-\epsilon$ de Orzag e Yakhot (1986) e iii) o modelo $k-\omega$ de Wilcox (1994). Para o modelo RNG $k-\epsilon$ foram testadas duas versões. A primeira delas define a viscosidade efetiva como mostrado no capítulo 3, enquanto que a segunda usa a definição tradicional adotada em praticamente todos os modelos $k-\epsilon$ encontrados na literatura. Da análise comparativa foi concluído que o modelo que melhor reproduz o escoamento no difusor corresponde à versão do modelo RNG $k-\epsilon$ com a definição de viscosidade efetiva na forma usual de outros modelos $k-\epsilon$. O modelo de Launder e Sharma (1974) prevê níveis de turbulência muito acima dos previstos por ambas as versões do modelo RNG $k-\epsilon$. Por este motivo, o modelo calcula regiões de recirculação na entrada do difusor muito menores do que as medições sugerem e falha deste modo na previsão da distribuição de pressão sobre a palheta

Definido o modelo de turbulência, foi realizado um número expressivo de simulações para investigar a sensibilidade da distribuição de pressão na palheta (disco frontal) e do campo de propriedades do escoamento em função da inclinação da palheta α , da relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem D/d e do número de Reynolds Re .

Da investigação do efeito da inclinação da palheta sobre o escoamento foi detectada uma variação significativa nos campos de pressão, velocidade e grandezas turbulentas. No caso da pressão, as variações atuam no sentido de aumentar a força resultante na palheta à medida que sua inclinação torna-se maior. Já para as grandezas turbulentas, foi observado um aumento dos níveis de turbulência na região onde as paredes do difusor ficam mais afastadas e uma diminuição onde as paredes estão mais próximas. Isto se deve essencialmente a variações no tamanho das regiões de recirculação do escoamento na entrada do difusor.

Analisando o efeito da relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem sobre a distribuição de pressão na palheta, observou-se que, para afastamentos pequenos entre palheta e assento, as maiores relações D/d causam uma maior restrição ao escoamento, originando valores mais elevados de pressão sobre a palheta. Observou-se também nos resultados que com o aumento do afastamento entre a palheta e o assento, os níveis de pressão para a menor relação de diâmetros se tornam eventualmente maiores.

Do exame da influência do número de Reynolds, Re , sobre o escoamento notou-se que o carregamento de pressão sobre a palheta, quando escrito numa forma adimensional apropriada, é independente do número de Reynolds a partir de uma determinada vazão. Quanto mais afastada a palheta estiver do assento, mais baixa será esta vazão. O efeito do número de Reynolds sobre as grandezas turbulentas decorre das alterações nas regiões de recirculação no difusor.

Uma sugestão deixada para trabalhos futuros está relacionada aos resultados não conclusivos obtidos com o modelo de $k-\omega$ de Wilcox (1994). Este modelo tem sido sugerido na literatura como sendo superior à maioria das versões de modelos $k-\epsilon$. No entanto, as previsões obtidas aqui para o escoamento através do difusor ficaram tão distantes dos dados experimentais que considerou-se prudente uma investigação mais detalhada do modelo. Infelizmente, o tempo requerido para a execução de tal tarefa não foi compatível com o cronograma estabelecido para as atividades da tese. Desta forma, sugere-se uma avaliação detalhada sobre o desempenho deste modelo. Uma outra atividade que pode ser deixada como sugestão refere-se à implementação da forma diferencial da expressão da viscosidade turbulenta sugerida por Orzag e Yakhot (1986) para o modelo RNG $k-\epsilon$. Com a implementação seria então possível uma comparação do seu desempenho, em termos de precisão e custo computacional, com aquele da forma algébrica adotada na presente investigação.

ESCOAMENTO TURBULENTO PULSANTE EM VÁLVULAS

6.1 Introdução

No capítulo anterior foi realizada uma análise do escoamento turbulento tridimensional em regime estacionário através de válvulas com a palheta inclinada em relação ao assento. Neste capítulo apresenta-se uma primeira investigação do escoamento turbulento pulsante em válvulas e, como tal, decidiu-se adotar a geometria simplificada de difusor radial com discos paralelos. A condição de pulsação para o escoamento é imposta através da variação da vazão na entrada do orifício segundo uma função senoidal.

A revisão de trabalhos em difusores radiais apresentada no Capítulo 2 revela que um número muito pequeno deles considerou o escoamento em regime transiente. Por exemplo, Trella e Soedel (1974a) analisaram a resposta não linear de um sistema de válvula de descarga de um compressor alternativo de ar, para a condição de escoamento compressível transiente. Os autores consideraram um sistema simplificado, onde a válvula foi modelada como um disco circular acoplado a uma mola e posicionado frente a um orifício circular. A solução acoplada do escoamento transiente e do movimento da válvula foi realizada através de uma formulação integral com vários volumes de controle. Mais tarde, os mesmos autores (Trella e Soedel, 1974b) analisaram a inclusão no modelo dos termos de inércia do escoamento para o cálculo do deslocamento da válvula, constatando a sua importância. Fleming e Brown (1982) analisaram experimentalmente o escoamento transiente considerando o movimento da válvula mas, devido à metodologia usada, o transiente não pôde ser analisado adequadamente. Piechna e Meier (1986) realizaram uma análise numérica do escoamento laminar bidimensional transiente em um canal de válvula, impondo uma oscilação periódica para o disco frontal. Ishizawa et al. (1987) realizaram uma investigação teórica e experimental do escoamento laminar incompressível entre dois discos paralelos, onde um regime transiente era obtido pela movimentação de um dos discos

em relação ao outro, mas mantendo-se a vazão constante. Os autores encontraram uma boa concordância entre os resultados teóricos e os dados experimentais. Lopes (1996) apresentou uma metodologia para a solução numérica do comportamento dinâmico de válvulas tipo palheta, utilizando um modelo de um grau de liberdade. Resultados foram obtidos para a condição de escoamento periódico, imposta pela variação senoidal da vazão na entrada do orifício de passagem.

Como observado do exposto acima, a quase totalidade dos trabalhos já realizados considerou o escoamento em regime laminar. Assim, o objetivo traçado para este capítulo é o de fornecer uma análise numérica do escoamento transiente em difusores radiais para a condição de regime turbulento. Por ser um primeiro passo, e por questões de limitação de tempo para a execução das atividades, decidiu-se adotar uma geometria bidimensional de difusor, onde os discos estão paralelos e concêntricos (Figura 6.1). O afastamento entre os discos é mantido fixo e o transiente é imposto por uma variação senoidal da vazão através do orifício de passagem.

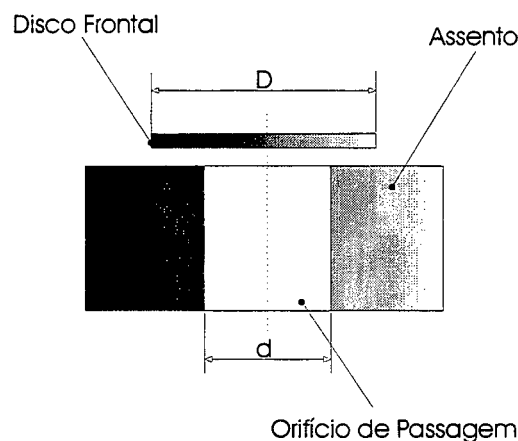


Figura 6.1: Geometria utilizada para a simulação do escoamento periódico.

Inicialmente, na seção 6.2 apresenta-se a formulação completa do problema, com a indicação das hipóteses simplificativas, equações governantes e condições de contorno. As equações são resolvidas numericamente e, em função disto, a seção 6.3 se detém nos testes realizados para validar a metodologia numérica. O trabalho analisa o escoamento sob quatro condições distintas de pulsação, variando-se amplitude e frequência. Os resultados dessas

análises são discutidos na seção 6.4. Finalmente, a seção 6.5 fornece um resumo das características observadas no escoamento, indicando as conclusões mais importantes e propondo novas investigações.

6.2 Formulação do Problema

Adotando o conceito de média de Reynolds, as equações governantes para o escoamento turbulento incompressível através do difusor da Figura 6.1 podem ser escritas na seguinte forma adimensional:

- Conservação da Massa

$$\frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (RV) + \frac{\partial}{\partial X} (RU) \right] = 0 \quad (6.1)$$

- Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Axial (X)

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (RVU) + \frac{\partial}{\partial X} (RUU) \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R\mu_e^* \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(R\mu_e^* \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + S + S_T \quad (6.2)$$

onde,

$$S = -\frac{\partial P}{\partial X} \quad (6.3)$$

$$S_T = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R\mu_t^* \frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(R\mu_t^* \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{2}{3} K \right)$$

- Conservação da Quantidade de Movimento na Direção Radial (R)

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \left[\frac{\partial}{\partial R} (RVV) + \frac{\partial}{\partial X} (RUV) \right] = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(\mu_e^* R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_e^* R \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + S + S_T \quad (6.4)$$

onde,

$$\begin{aligned} S &= -\mu^* \frac{V}{R^2} - \frac{\partial P}{\partial R} \\ S_\tau &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \mu_t^* \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\mu_t^* \frac{\partial U}{\partial R} \right) - 2 \mu_t^* \frac{V}{R^2} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{2}{3} K \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

As equações acima foram adimensionalizadas segundo as relações (5.12), enquanto que para o tempo foi adotada a seguinte relação adimensional,

$$\tau = \frac{\bar{U}_{in} t}{d} \quad (6.6)$$

onde t é o tempo dimensional e \bar{U}_{in} é o valor médio ao longo dos ciclos da velocidade média \bar{U}_{in} no orifício de passagem de diâmetro d .

As equações do modelo de turbulência RNG k - ε na forma adimensional para o escoamento transiente são obtidas das equações 3.51 e 3.52, e escritas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} (UK) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (VK) = \\ \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial K}{\partial X} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R (\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial K}{\partial R} \right] + P_K - \varepsilon \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} (U\varepsilon) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R V \varepsilon) = \\ \frac{\partial}{\partial X} \left[(\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R (\mu^* + \gamma \mu_t^*) \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} \right] + \frac{\varepsilon}{K} (c_{\varepsilon 1} P_K - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) - \hat{R} \end{aligned} \quad (6.8)$$

onde γ e P_K são dados pelas equações 3.53 e 5.29, respectivamente, e \hat{R} é a forma adimensional do termo R da equação 3.54.

As condições de contorno necessárias para a solução das equações 6.1-6.3 e 6.5-6.6 são praticamente as mesmas prescritas para o escoamento turbulento bidimensional permanente

tratado no capítulo 5. A única exceção é a condição de contorno na entrada para a componente de velocidade axial U , para a qual é imposta uma variação senoidal segundo a seguinte relação,

$$\bar{U}_{in}(t) = \bar{\bar{U}}_{in} [1 + A \sin(\omega t)] \quad (6.9)$$

onde $\bar{\bar{U}}_{in}$ é a velocidade média ao longo dos ciclos, em torno da qual a velocidade $\bar{U}_{in}(t)$ oscila com uma amplitude A e uma frequência angular ω . Como no presente trabalho as equações são resolvidas na forma adimensional, a velocidade média na entrada é sempre igual a 1. A periodicidade do escoamento é introduzida através da variação da viscosidade molecular, escrita na forma adimensional como $\mu^* = 1/Re$, que passa a ser recalculada para cada avanço de tempo pela seguinte relação:

$$Re(t) = Re_m [1 + A \sin(\omega t)] \quad (6.10)$$

onde $Re(t)$ é o número de Reynolds em função do tempo, e Re_m é o número de Reynolds médio do escoamento ao longo dos ciclos, baseado na velocidade média e no diâmetro relativo ao orifício de passagem.

6.3 Validação da Solução Numérica

Não estão disponíveis ainda na literatura dados experimentais para o escoamento pulsante em difusores radiais e, desta forma, a validação da solução numérica objetivada neste capítulo teve de se limitar a uma investigação de erros de truncamento. Dentro deste contexto, é razoável assumir que as conclusões sobre a malha computacional obtidas neste e em outros trabalhos possam ser também aplicadas aqui para se ter uma idéia do nível de discretização necessário. Assim, os testes de sensibilidade a serem apresentados nesta seção contemplam somente parâmetros do método ligados à formulação transiente, tais como discretização temporal. Uma verificação adicional foi possível pela comparação dos resultados gerados pela presente metodologia com os resultados obtidos no trabalho de Matos (2001).

Denotando a frequência linear da pulsação como f e usando a relação (6.6), pode-se definir uma frequência linear adimensional, conhecido como número de Strouhal St :

$$S_t = \frac{d \cdot f}{\overline{U}_{in}} \quad (6.11)$$

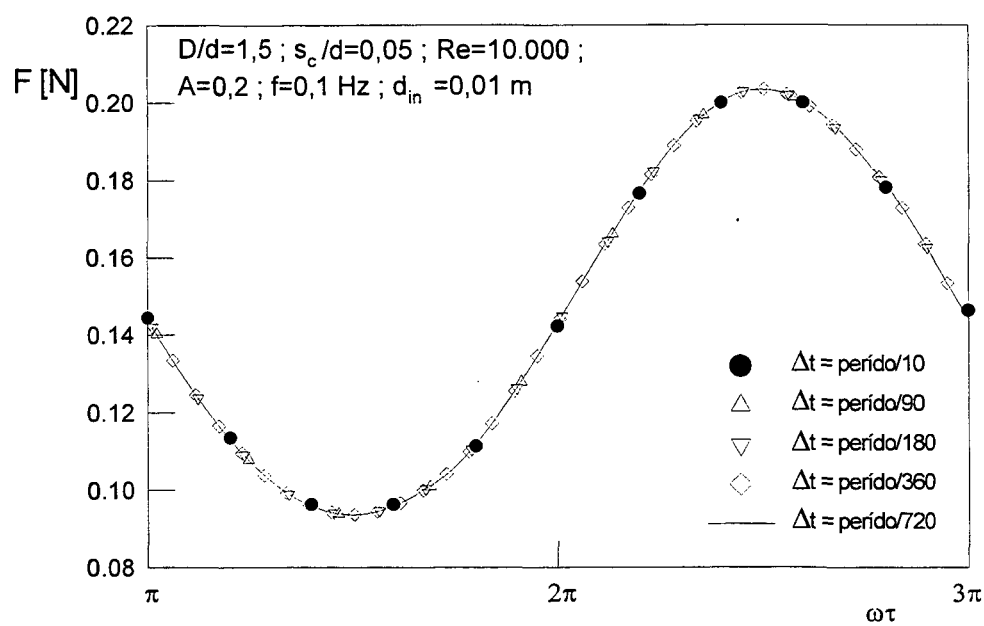
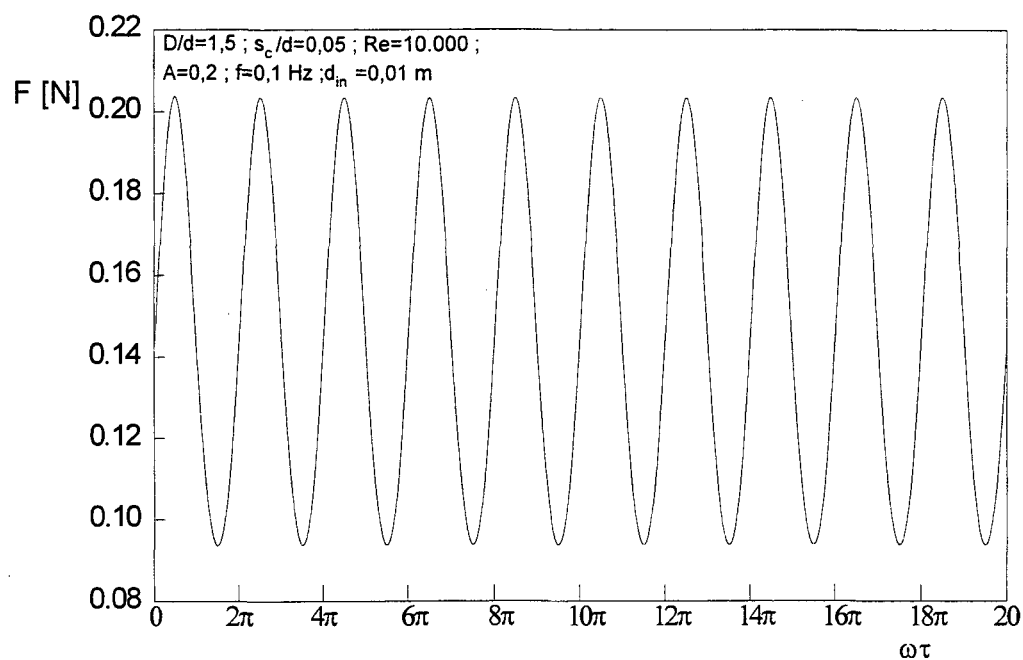
onde \overline{U}_{in} é o valor da velocidade média no orifício de passagem de diâmetro ao longo dos ciclos, e em torno do qual a pulsação do escoamento ocorre. Em linha com os trabalhos de Lopes (1995) e Matos (2001) adotou-se neste trabalho uma geometria de difusor com uma relação de diâmetros $D/d = 1,5$ ($d = 0,01$ m). Adicionalmente, escolheu-se o ar como fluido de trabalho ($\mu = 1,8 \times 10^{-5}$ Pa.s e $\rho = 1,296$ kg/m³).

Um primeiro teste realizado para a metodologia foi verificar a periodicidade da solução numérica ao longo de 10 períodos. A simulação foi iniciada através da leitura de um campo de propriedades do escoamento, gerado previamente com a versão permanente do código computacional para uma vazão correspondente a Re_m . A figura 6.2 apresenta o resultado da força resultante sobre o disco frontal ao longo dos ciclos para um número de Reynolds médio $Re_m = 10.000$, afastamento entre os discos $s/d = 0,05$, amplitude de pulsação $A = 0,2$ e frequência $f = 0,1$ Hz ($St = 7 \times 10^{-5}$). Embora não muito visível na figura, observou-se que a periodicidade da solução ocorre praticamente desde o primeiro ciclo. Quando a simulação foi iniciada sem a leitura de um campo inicial obtido como indicado acima, valores elevados para a força ocorreram no início do período mas se ajustaram rapidamente a um comportamento periódico após meio ciclo. Em função desses resultados, todas as simulações foram realizadas para um período e meio de pulsação e os resultados então plotados para o intervalo $\pi \leq \omega t \leq 3\pi$.

Um outro aspecto da metodologia analisado foi o incremento de tempo $\Delta\tau$ que deveria ser adotado para acompanhar de forma adequada a evolução temporal do escoamento. Neste sentido foram realizadas simulações para diferentes incrementos de tempo, obtidos dividindo o período τ em um número n de intervalos iguais ($\Delta\tau = \tau/n$). Resultados da variação temporal da força sobre o disco frontal para $n = 10, 90, 180, 360$ e 720 são apresentados na Figura 6.3 e demonstram que a solução é praticamente insensível a este parâmetro numérico. No entanto, em função da melhor convergência do procedimento de cálculo observada quando menores incrementos de tempo eram

empregados, optou-se por adotar no restante das simulações um intervalo de tempo correspondente a $n = 720$.

De maneira a verificar a correta implementação da versão transiente do código computacional, resultados para a força resultante sobre o disco frontal ao longo do ciclo foram obtidas para duas condições de escoamento laminar pulsante e comparados com os resultados obtidos por Matos (2001). Nessas simulações o número de Reynolds médio ao longo dos ciclos, Re_m , foi tomado como 540, enquanto que a geometria do difusor foi definida pela relação de diâmetros $D/d = 3$ e pelo afastamento $s/d = 0,05$. As duas condições de pulsação foram tomadas a partir de duas amplitudes de pulsação ($A = 0,2$ e $0,5$) mas mantendo-se a frequência em $f = 60$ Hz ($St = 7,8 \times 10^{-1}$). A Figura 6.4 mostra a comparação entre os resultados de força sobre o disco frontal ao longo de um ciclo obtidos por Matos (2001) e no presente trabalho. Apesar de uma pequena defasagem entre os resultados, observa-se um bom nível de concordância entre os mesmos. Embora a razão desta diferença não tenha sido investigada de forma sistemática, pode-se afirmar que pelo menos parte dela está associada a diferenças entre as metodologias usadas nos dois códigos. Por exemplo, muito embora as malhas computacionais sejam idênticas, o código desenvolvido neste trabalho utiliza um arranjo colocalizado para as variáveis, enquanto que Matos (2001) usa um arranjo desencontrado.



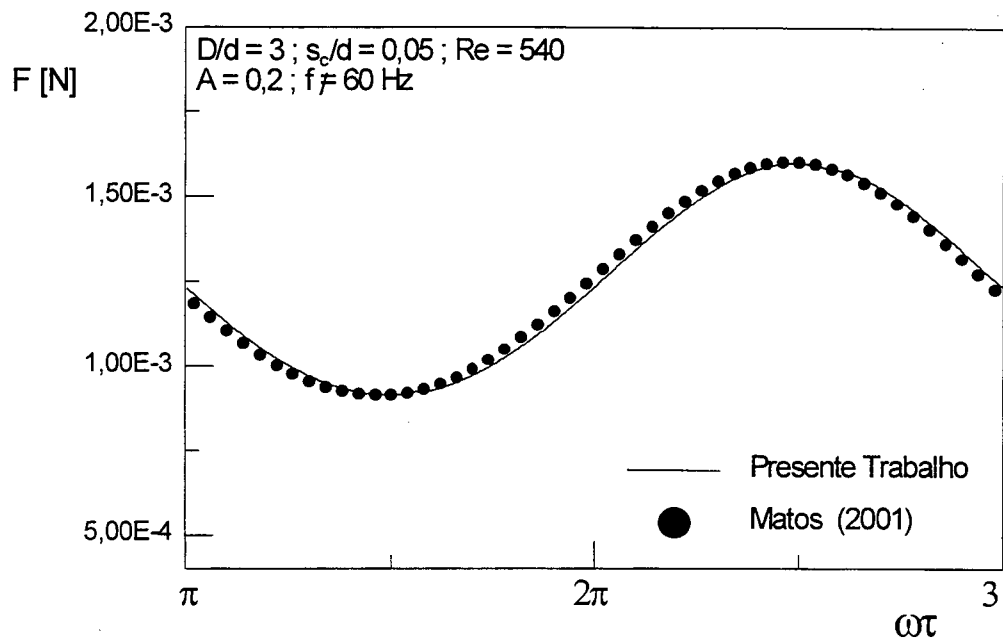
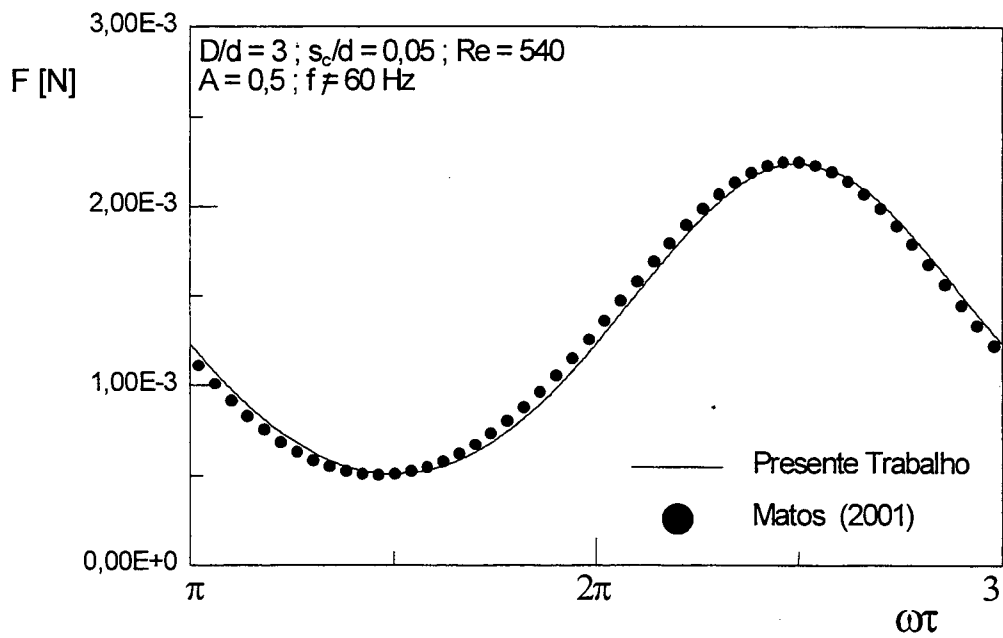
(a) $A = 0,2$ (b) $A = 0,5$

Figura 6.4: Comparações entre resultados de força sobre o disco frontal obtidos neste trabalho e em Matos (2001): $D/d = 3$; $Re_m = 540$; $s/d = 0,05$, $f = 60$ Hz ($St = 7,8 \times 10^{-1}$).

6.4 Resultados

Após os testes de verificação do código computacional e da solução numérica, foi realizada uma série de simulações para a análise do comportamento do escoamento turbulento pulsante no difusor. Em função da demanda computacional elevada, todas as simulações foram realizadas para um conjunto único de relação de diâmetros, $D/d = 1,5$ ($d = 0,01$ m), afastamento entre os discos, $s/d = 0,05$ e número de Reynolds médio $Re_m = 25.000$. Com estes parâmetros fixos, foram selecionadas quatro condições de pulsação:

- i) $A = 0,2$ e $f = 0,1$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-5}$);
- ii) $A = 0,2$; $f = 10$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-3}$);
- iii) $A = 0,5$; $f = 0,1$ Hz;
- iv) $A = 0,5$; $f = 10$ Hz.

A representação da pulsação da vazão do escoamento está apresentada na Figura 6.5 em termos do número de Reynolds, Re , baseado no orifício de passagem de diâmetro d . Encontram-se também representadas na figura as posições ao longo do ciclo para as quais serão apresentados resultados do escoamento. As posições no intervalo $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$ correspondem a um intervalo do ciclo onde a vazão (ou número de Reynolds) no orifício de passagem está sendo diminuída. Por outro lado, as posições no intervalo $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$ correspondem a um intervalo onde a vazão é aumentada. Essas partes do ciclo são denominadas de desaceleração e aceleração do escoamento, respectivamente.

Na Figura 6.6 é mostrada a distribuição de pressão dimensional sobre a superfície do disco frontal para a condição representada por $A = 0,2$ e $f = 10$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-3}$). Observa-se na Figura 6.6(a) que o nível do patamar de pressão na região central do disco diminui com a diminuição do número de Reynolds. Isto decorre do fato de que a diminuição do número de Reynolds representa a própria diminuição da velocidade no orifício de passagem, propiciando assim uma pressão de estagnação menor sobre o disco frontal. O contrário acontece para a parte do ciclo onde o escoamento é acelerado, representado na Figura 6.6(b). A mesma observação em relação à pressão de estagnação pode ser feita também para a distribuição de pressão dimensional referente à condição de amplitude $A = 0,5$ e frequência $f = 10$ Hz mostrada na Figura 6.7. A

diferença entre as duas figuras se refere aos níveis da pressão, decorrente da maior amplitude de pulsação empregada para o escoamento da Figura 6.7.

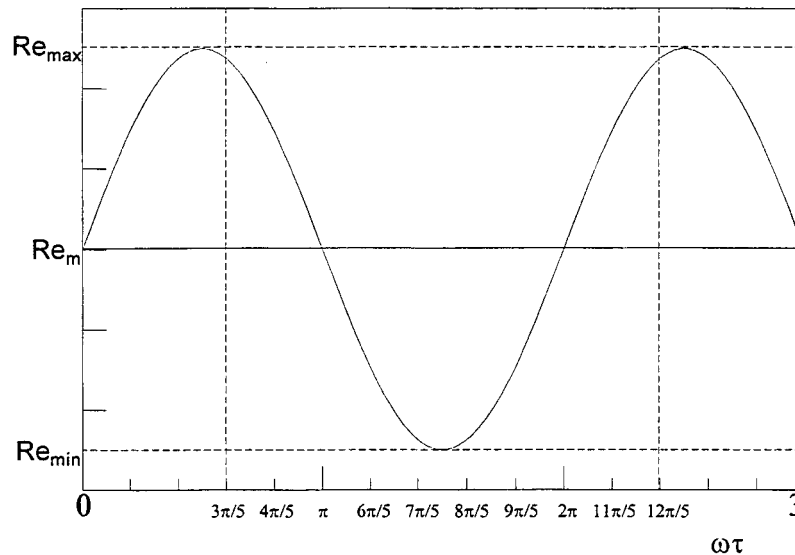


Figura 6.5: Representação gráfica da variação do número de Reynolds no orifício de passagem ao longo de posições $\omega\tau$ do ciclo.

A Figura 6.8 mostra as distribuições de pressão adimensionais ($P^* = 2p/\rho\bar{U}_{in}^2$) para $A = 0,2$ e $f = 0,1$ Hz. Observa-se que a distribuição de pressão adimensional é praticamente insensível à variação do número de Reynolds que ocorre ao longo do ciclo, havendo apenas uma variação muito pequena na região do difusor ($r/d > 0,5$) e que torna-se mais visível nas condições de número de Reynolds baixos. Esta similaridade entre as distribuições de pressão adimensional já havia sido observada por Deschamps et. al. (1996) para duas condições de escoamento estacionário ($Re = 10.000$ e 40.000) através do difusor com discos paralelos. A explicação disto é que quando o número de Reynolds é aumentado, a distribuição de pressão é inicialmente afetada pelo surgimento de uma região de separação do escoamento na entrada do difusor. Essa região de recirculação cresce até um certo tamanho e então se estabiliza. A partir desse ponto o escoamento adquire um padrão que não se altera mais com o número de Reynolds, o mesmo ocorrendo com a forma da distribuição de pressão adimensional (não obstante a alteração nos níveis de pressão

dimensional). A Figura 6.9 apresenta as distribuições de pressão adimensional para o caso com amplitude $A = 0,2$ e frequência $f = 10$ Hz. Além de se verificar novamente a similaridade entre as distribuições de pressão ao longo do ciclo, observa-se também que são praticamente as mesmas das apresentadas na Figura 6.8 para $f = 0,1$ Hz. Portanto, este resultado demonstra que o carregamento de pressão sobre o disco frontal não é afetado pela frequência da pulsação e que as diferenças na entrada do difusor decorrem exclusivamente da variação do número de Reynolds.

As Figuras 6.10 e 6.11 apresentam as distribuições de pressão adimensionais para uma amplitude maior, $A = 0,5$, e duas condições de frequência, $f = 0,1$ Hz e 10 Hz, respectivamente. Comparando as figuras, chega-se novamente à conclusão de que a frequência não exerce papel algum sobre o escoamento, resultando distribuições de pressão para as duas condições de frequência virtualmente idênticas. Por outro lado, devido à maior amplitude de variação imposta ao número de Reynolds, observa-se que a diferença entre as distribuições de pressão na região do difusor ($r/d > 0,5$) é bem mais visível.

Uma vez que o carregamento de pressão sobre o disco frontal não é afetado pela frequência da pulsação, independente da amplitude, não é surpresa verificar na Figura 6.12 que o mesmo acontece com a força resultante sobre o disco, quando o escoamento é pulsado sob frequências de 0,1, 1,0 e 10,0 Hz.

A Figura 6.13 mostra a variação temporal da força dimensional sobre o disco frontal, para as duas amplitudes testadas: $A = 0,2$ e 0,5. Observa-se que as forças obtidas com as duas amplitudes são iguais a cada meio período devido ao número de Reynolds assumir seu valor médio, o qual é igual para as duas amplitudes. A Figura 6.14 mostra que as distribuições de pressão para as duas amplitudes numa dessas posições angulares ($\omega\tau = \pi$) são realmente idênticas.

6.5 Conclusões

O presente capítulo apresentou uma primeira análise numérica do escoamento turbulento pulsante em difusores radiais com discos paralelos.

A partir de resultados de distribuição de pressão e de força sobre o disco frontal, verificou-se que o escoamento não é afetado pelas condições de pulsação do mesmo. Esta

conclusão, no entanto, é limitada à geometria de difusor investigada ($D/d = 1,5$, onde $d = 0,01$ m, e $s/d = 0,05$).

Um aspecto que deve ser investigado em um próximo trabalho se refere à influência das forças viscosas, ocasionadas no difusor pela proximidade dos discos, na amortização dos efeitos da pulsação. É possível que o comportamento encontrado neste trabalho não se verifique para outras condições de afastamento entre os discos.

O tempo computacional despendido para a obtenção da solução numérica de cada um dos casos apresentados neste trabalho foi elevado. Para que situações mais complexas de escoamentos pulsantes (por exemplo, disco frontal móvel, escoamento tridimensional, etc) possam ser analisadas é necessário que seja investigado o uso de técnicas numéricas para a redução deste tempo.

Uma grande limitação do presente trabalho é a ausência de dados experimentais para a validação dos resultados numéricos. Portanto, a investigação experimental do escoamento pulsante deve ser também considerada em etapas futuras.

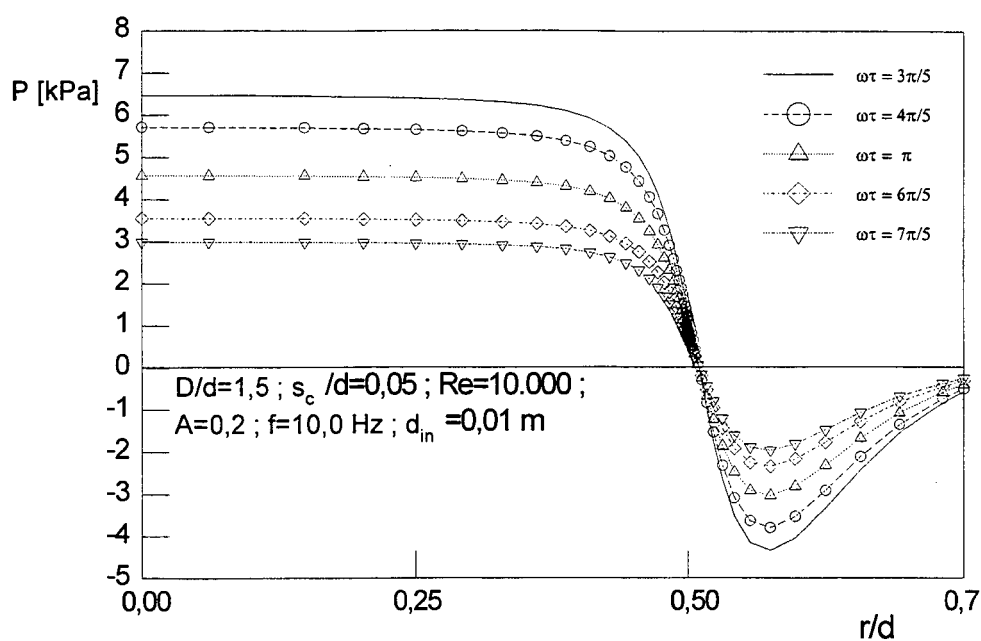
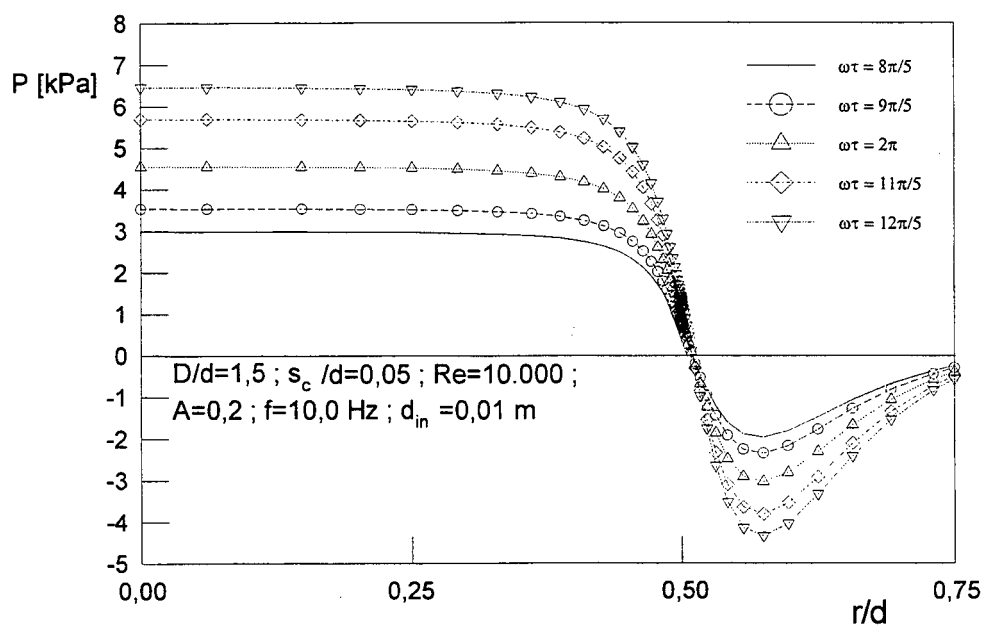
(a) Desaceleração do escoamento; $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$.(b) Aceleração do escoamento; $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$.

Figura 6.6: Distribuição de pressão dimensional no disco frontal ao longo do ciclo;

$A = 0,2$ e $f = 10,0$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-3}$).

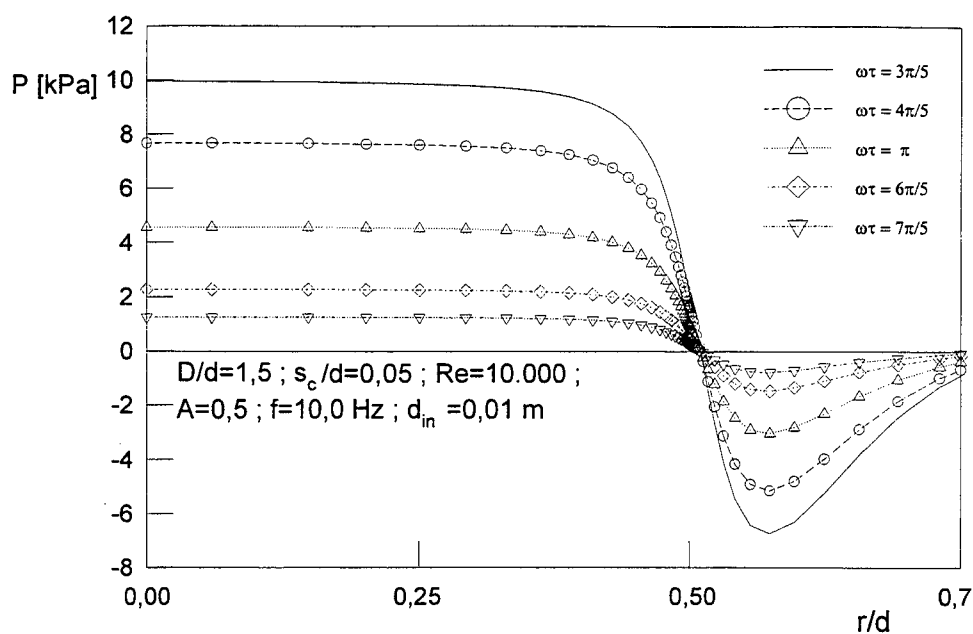
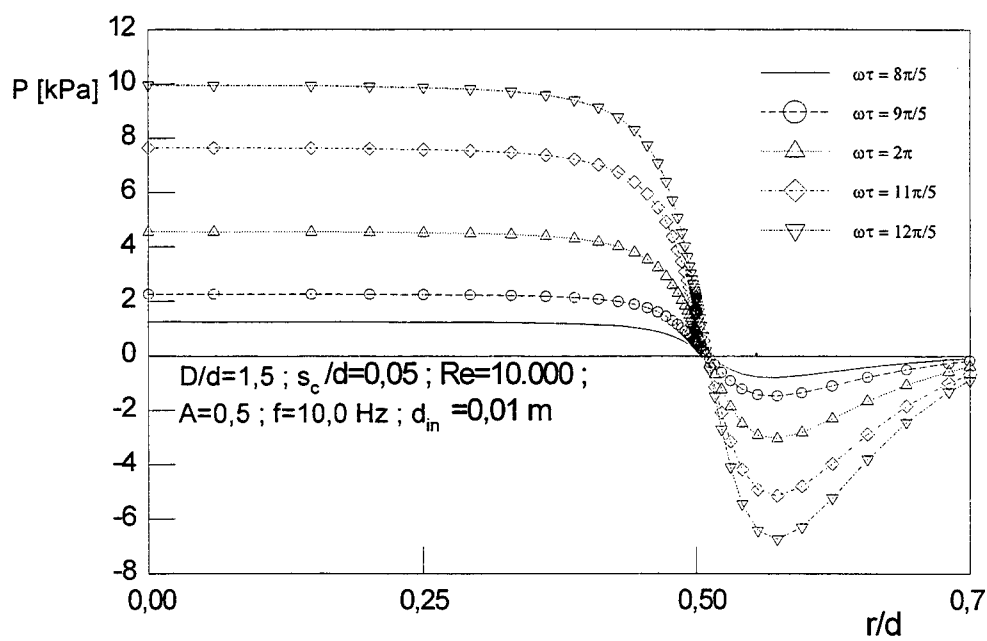
(a) Desaceleração do escoamento; $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$.(b) Aceleração do escoamento; $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$.

Figura 6.7: Distribuição de pressão dimensional no disco frontal ao longo do ciclo;
 $A = 0,5$ e $f = 10,0$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-3}$).

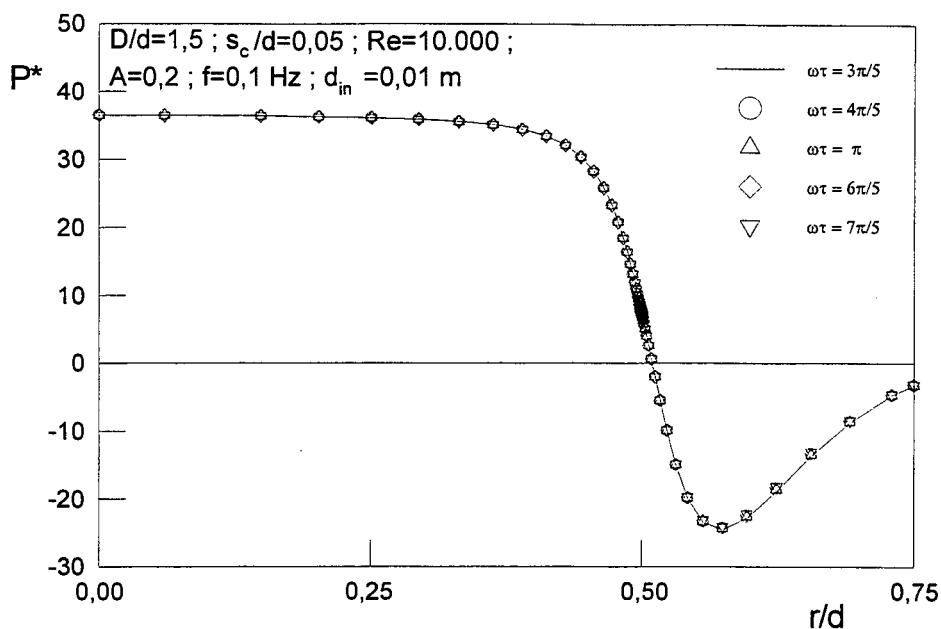
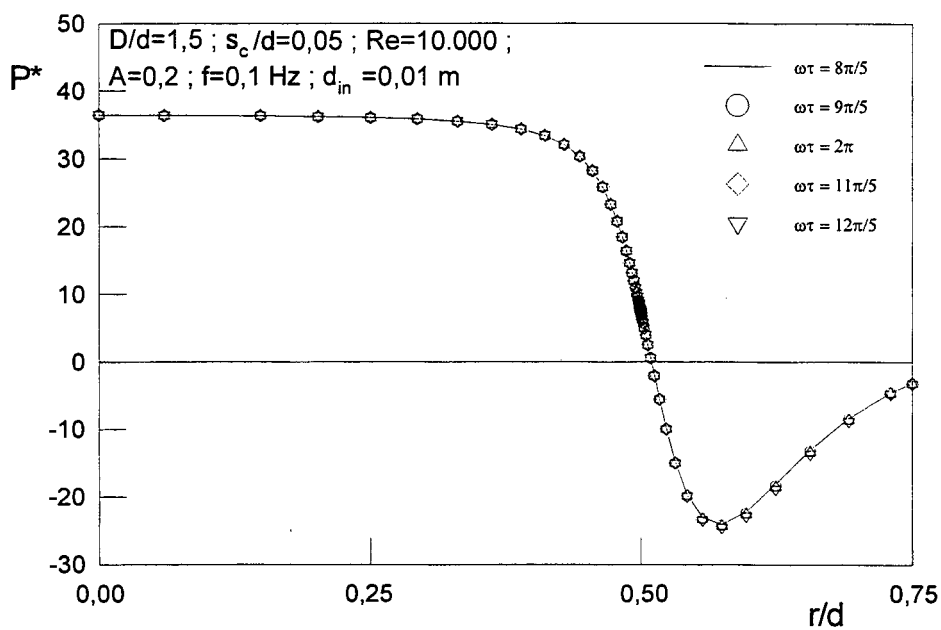
(a) Desaceleração do escoamento; $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$.(b) Aceleração do escoamento; $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$.

Figura 6.8: Distribuição de pressão adimensional no disco frontal ao longo do ciclo;

 $A = 0,2$ e $f = 0,1$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-5}$).

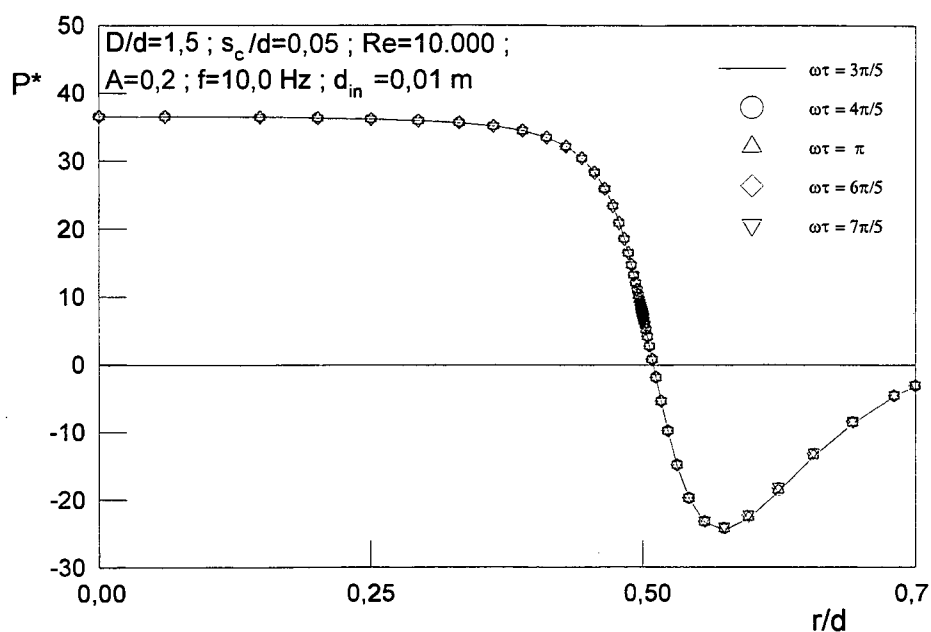
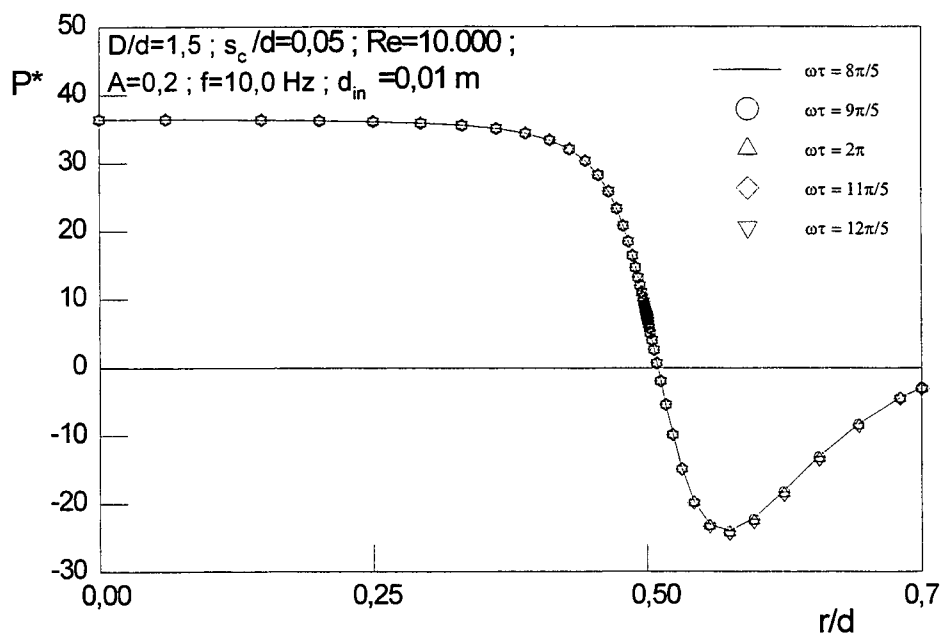
(a) Desaceleração do escoamento; $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$.(b) Aceleração do escoamento; $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$.

Figura 6.9: Distribuição de pressão adimensional no disco frontal ao longo do ciclo;

 $A = 0,2$ e $f = 10,0$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-3}$).

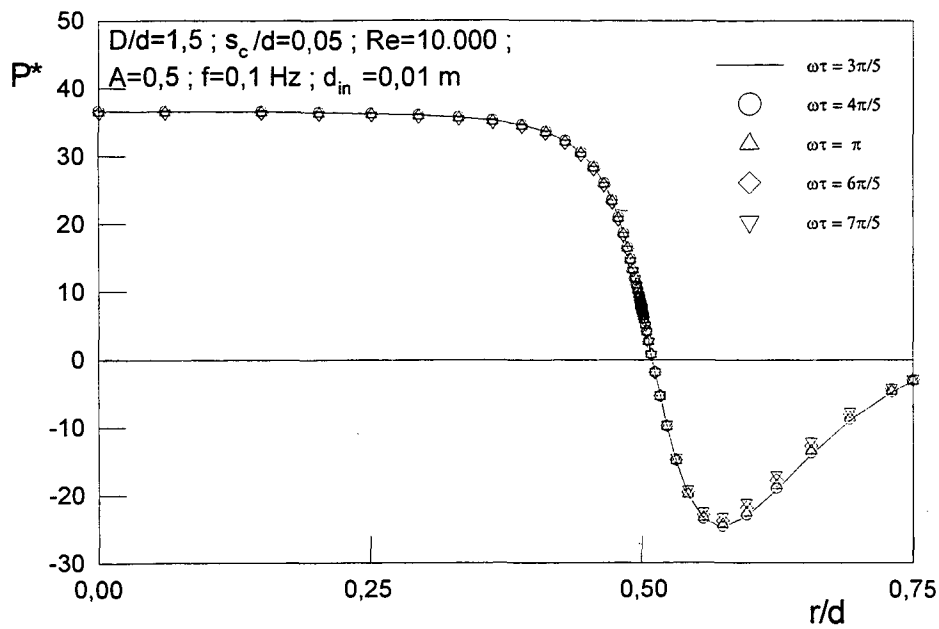
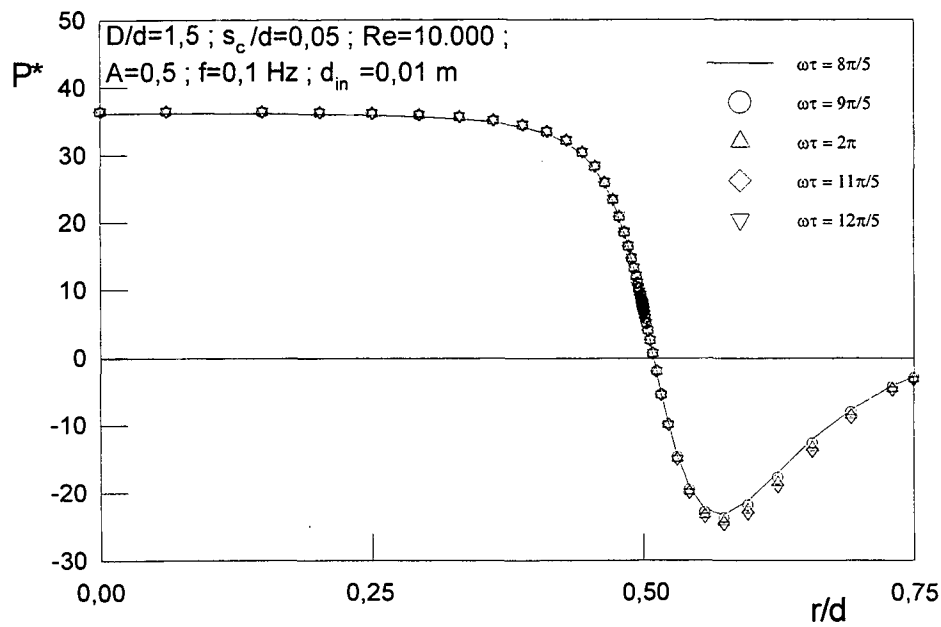
(a) Desaceleração do escoamento; $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$.(b) Aceleração do escoamento; $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$.

Figura 6.10: Distribuição de pressão adimensional no disco frontal ao longo do ciclo;

 $A = 0,5$ e $f = 0,1$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-5}$).

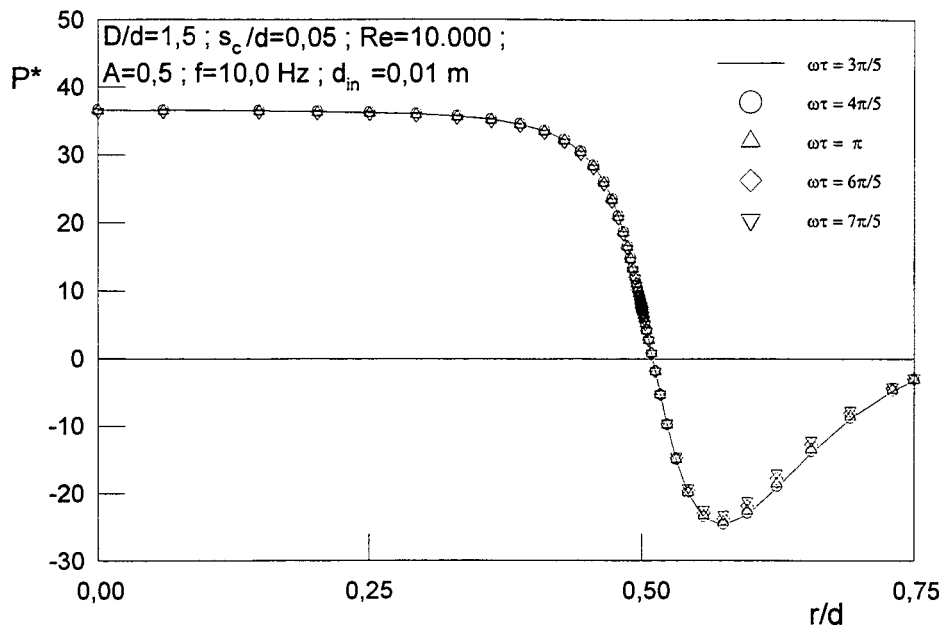
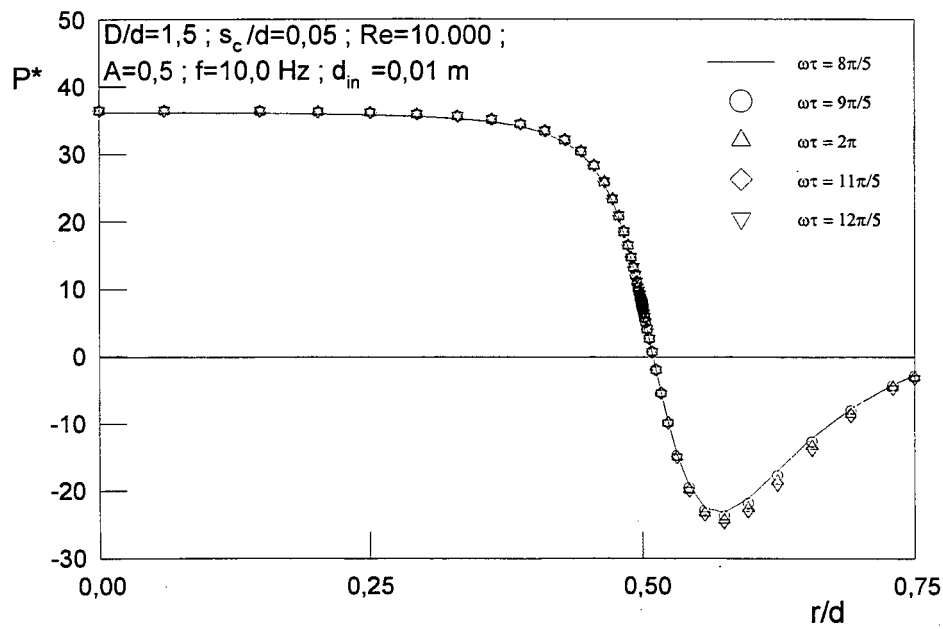
(a) Desaceleração do escoamento; $3\pi/5 \leq \omega\tau \leq 7\pi/5$.(b) Aceleração do escoamento; $8\pi/5 \leq \omega\tau \leq 12\pi/5$.

Figura 6.11: Distribuição de pressão adimensional no disco frontal ao longo do ciclo;

 $A = 0,5$ e $f = 10,0$ Hz ($St = 2,8 \times 10^{-3}$).

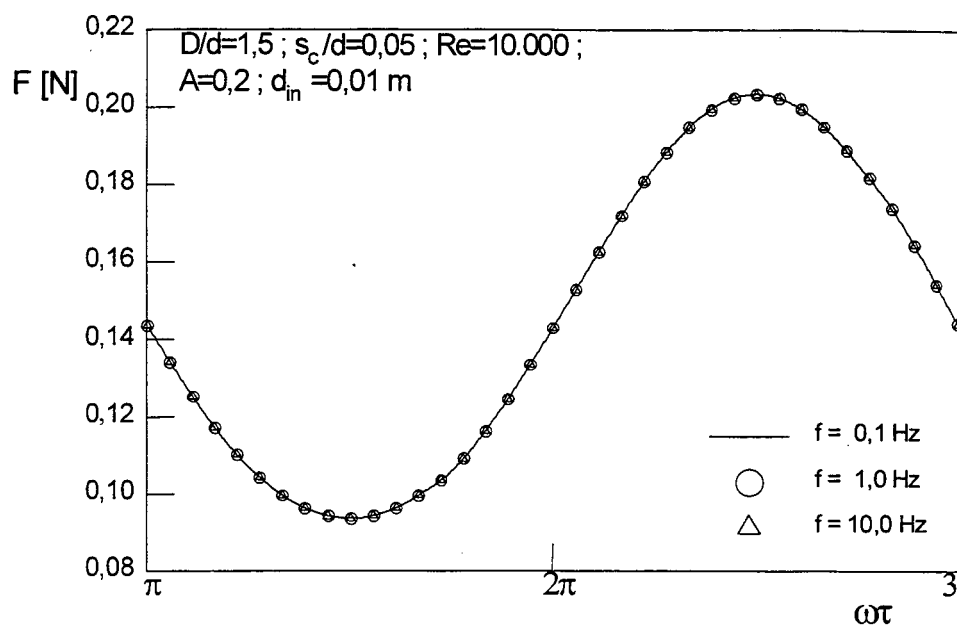
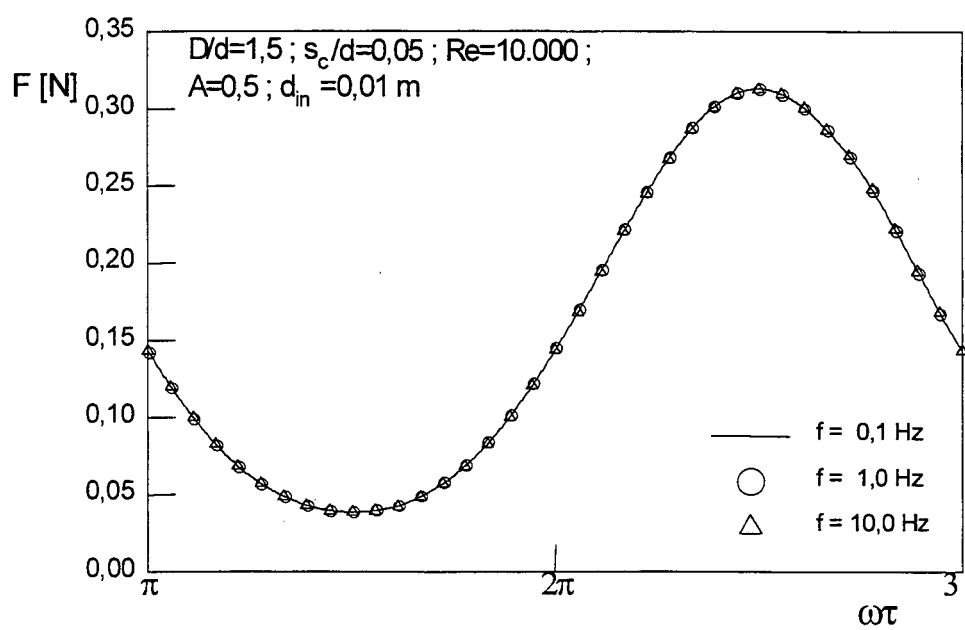
(a) $A = 0,2$.(b) $A = 0,5$.

Figura 6.12: Influência da frequência sobre a distribuição de força sobre o disco frontal.

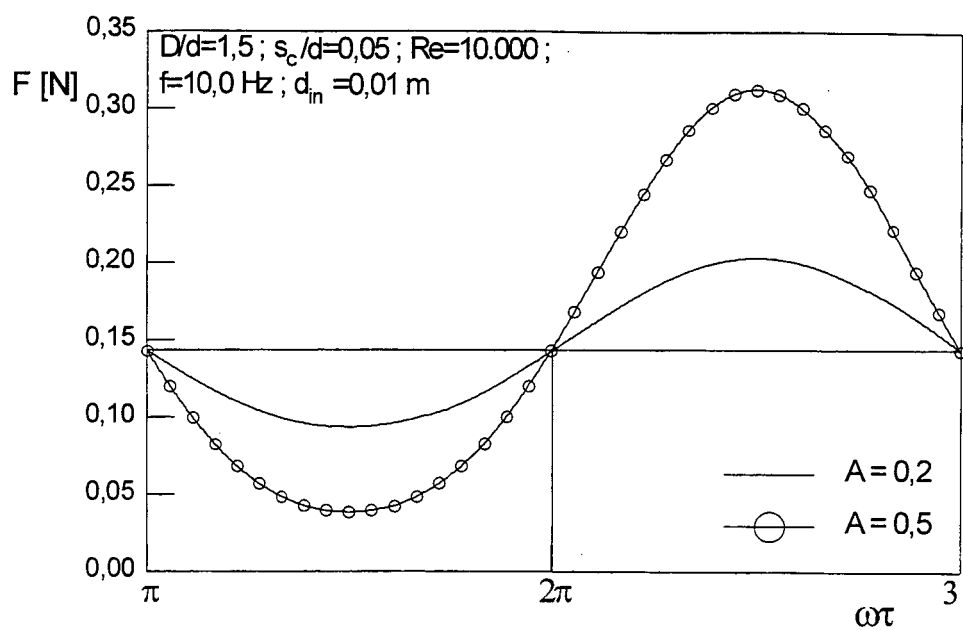


Figura 6.13: Variação da força com a amplitude para $f = 10,0$ Hz.

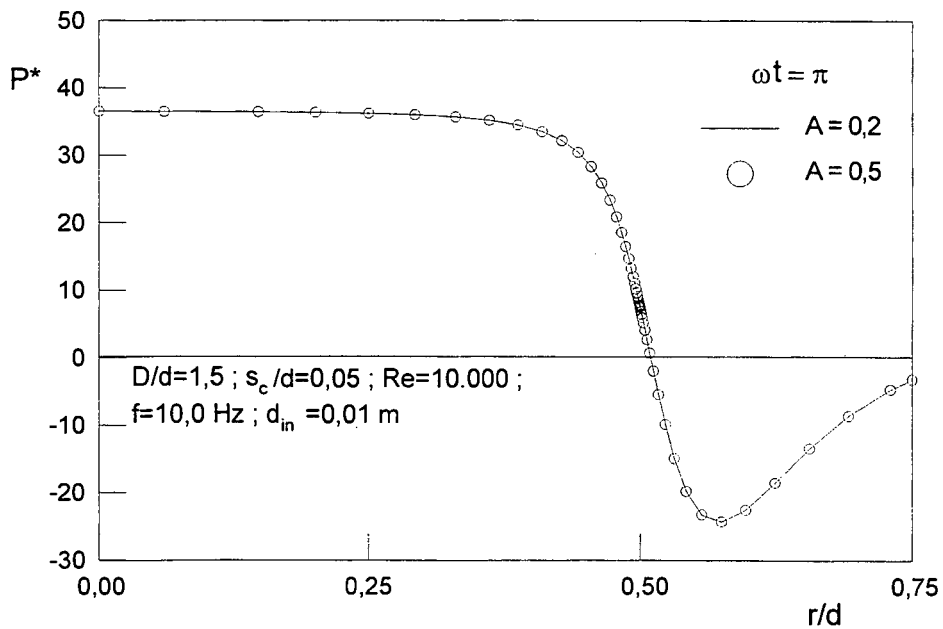


Figura 6.14: Comparação entre as distribuições de pressão adimensionais obtidas com amplitudes $A = 0,2$ e $0,5$, na posição angular $\omega t = \pi$.

CONCLUSÕES

7.1 Comentários Preliminares

O presente trabalho considerou a modelação de escoamentos turbulentos através de válvulas do tipo automática, muito utilizadas em compressores alternativos. Inicialmente, no capítulo 1, foi realizada uma breve introdução sobre o funcionamento do compressor de maneira a ressaltar a importância do sistema de válvulas na sua eficiência.

Os difusores radiais se constituem na geometria básica para a investigação do escoamento em válvulas. A fim de verificar os trabalhos disponíveis na literatura sobre difusores radiais, e assim definir a linha da investigação deste trabalho, uma revisão bibliográfica extensa foi realizada e resumida no capítulo 2. Basicamente, a revisão revelou cinco pontos importantes:

- i) Quase a totalidade dos trabalhos na área adotaram a geometria simplificada de escoamento entre discos paralelos, sendo o trabalho de Possamai *et al.* (1995) o único a investigar a situação de escoamento com disco frontal inclinado;
- ii) A maioria dos trabalhos considerou o escoamento em regime laminar;
- iii) Naqueles trabalhos que resolveram numericamente o escoamento turbulento, verifica-se que o modelo RNG $k-\epsilon$ é o que prevê o escoamento em melhor concordância com os dados experimentais;
- iv) As análises numéricas realizadas para a condição de escoamento periódico assumiram a condição de escoamento laminar;
- v) Grande parte das investigações utilizaram relações de diâmetros entre palheta e orifício de passagem, D/d , bem maiores do que aquelas comumente adotadas em válvulas de compressores.

Em função da revisão bibliográfica realizada, foram definidos os seguintes objetivos para o presente trabalho:

- i) Realizar uma análise numérica, com validação experimental, do escoamento turbulento através de válvulas inclinadas para diferentes condições geométricas (inclinação da palheta, α , relação de diâmetros, D/d , e afastamento da palheta, s/d) e números de Reynolds;
- ii) Investigar o comportamento dinâmico do escoamento turbulento pulsante em válvulas a partir da geometria simplificada de difusor radial com discos paralelos;
- iii) Oferecer uma análise crítica do desempenho de modelos de turbulência na previsão do escoamento em válvulas.

7.2 Conclusões Principais

Certamente os dados gerados pelo presente trabalho serão de auxílio para trabalhos futuros e, de fato, permitirão até um maior detalhamento da análise realizada neste documento. O que segue são as principais conclusões obtidas a partir das discussões dos resultados dos capítulos 5 e 6.

O capítulo 5 considerou a modelação do escoamento turbulento através de válvulas inclinadas, onde três modelos de turbulência foram testados: o modelo k - ϵ de Launder e Sharma (1974), o modelo RNG k - ϵ de Orzag e Yakhot (1986) e o modelo k - ω de Wilcox (1994). No caso do modelo RNG k - ϵ foram testadas duas versões: a primeira calcula a viscosidade efetiva conforme a proposição original de Orzag e Yakhot (1986) e a segunda usa a definição de viscosidade efetiva do modelo k - ϵ de Launder e Spalding (1972). A partir dos resultados têm-se as seguintes conclusões:

- i) O modelo que melhor reproduz o escoamento é a versão do modelo RNG k - ϵ com a viscosidade efetiva definida como no modelo k - ϵ de Launder e Spalding (1972);
- ii) O modelo de Launder e Sharma (1974) prevê níveis de turbulência muito acima daqueles previstos por ambas as versões do modelo RNG k - ϵ . Por este motivo, o modelo

calcula regiões de recirculação na entrada do difusor muito menores do que as medições sugerem e, desta forma, falha em reproduzir dados experimentais de distribuição de pressão sobre a palheta;

iii) Como observado por Possamai et al. (1995) para o escoamento laminar, foi verificado também para o escoamento turbulento que a distribuição da pressão sobre a palheta é bem sensível à sua inclinação em relação ao assento e, portanto, o mesmo acontece com a força resultante;

iv) A análise da influência da relação entre os diâmetros da palheta e do orifício de passagem, D/d , sobre o escoamento revelou que para a maior relação testada ($D/d = 3$) a distribuição de pressão pode originar uma força negativa sobre a palheta. Por outro lado, a menor relação ($D/d = 1,66$) resulta valores positivos para a força em todas as situações;

v) Verificou-se que a partir de um determinado valor de vazão a distribuição de pressão adimensional sobre a palheta torna-se praticamente independente do número de Reynolds. Este valor de vazão depende dos parâmetros geométricos da válvula mas pode ser estimado de forma aproximada como sendo equivalente a um número de Reynolds de 25.000.

O capítulo 6 analisou o escoamento turbulento pulsante em válvulas a partir da geometria de um difusor radial com disco paralelos. Para as condições de afastamento e relação de diâmetros consideradas têm-se as seguintes conclusões:

i) A distribuição de pressão sobre a palheta não é sensível à pulsação do escoamento, caracterizada por diferentes condições de amplitude e frequências;

ii) O tempo requerido para a simulação computacional do transiente é extremamente elevado e pode representar um grande obstáculo para a modelação da dinâmica da palheta.

7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

O presente trabalho se constitui numa contribuição para a modelação e o entendimento fenomenológico do escoamento em válvulas de compressores. A partir dos resultados obtidos e das análises realizadas, sugerem-se os seguintes tópicos para o prosseguimento da pesquisa:

i) Investigação de técnicas numéricas para reduzir o tempo computacional das simulações.

Com certeza, à medida que as simulações forem sendo direcionadas para a análise do escoamento transiente, haverá uma necessidade de reduzir o tempo de processamento computacional para que o código seja uma ferramenta viável. Esta necessidade já se fez presente na simulação do escoamento pulsante para a situação simplificada de difusor com discos paralelos e se tornará ainda maior no caso de escoamento tridimensional ou na modelação da dinâmica da palheta.

ii) Análise mais detalhada do modelo de turbulência RNG k- ϵ

Apesar de fornecer os melhores resultados em termos de concordância com dados experimentais de pressão sobre a palheta, o modelo de turbulência RNG k- ϵ necessita de testes adicionais para verificar o seu desempenho na previsão de grandezas turbulentas. Desta forma, é fundamental que, além da medição da distribuição de pressão sobre a palheta, sejam coletados dados experimentais também para grandezas turbulentas, tais como tensões de Reynolds e energia cinética turbulenta. Uma bancada experimental com estas características poderá fornecer também dados importantes de perfis de velocidade do escoamento.

iii) Investigação experimental do escoamento pulsante

Este é outro desenvolvimento na área experimental necessário para o prosseguimento da modelação do problema e refere-se ao escoamento pulsante. Como mencionado, uma grande limitação da análise numérica realizada no capítulo 6 é a ausência de dados experimentais para a sua validação.

iv) Influência dos diferentes parâmetros sobre o escoamento pulsante turbulento (afastamento, relação de diâmetros, número de Reynolds);

Devido a limitações de tempo, a investigação do escoamento pulsante realizada neste trabalho foi restringida a um conjunto único de afastamento s/d , relação de diâmetros D/d e número de Reynolds Re . Com o código implementado é possível a realização de uma série de simulações adicionais para analisar o efeito da pulsação sob diferentes combinações destes parâmetros.

v) Modelação do escoamento incluindo a dinâmica da palheta

A partir dos subsídios gerados neste trabalho para a modelação da turbulência, deve-se caminhar no sentido de incluir no modelo computacional também a dinâmica da palheta. Tal investigação pode considerar num primeiro momento uma vazão constante no difusor e um movimento prescrito para a palheta. Numa etapa seguinte, poderá então ser focado o problema onde a posição da palheta é função do próprio carregamento da pressão sobre sua superfície originado pelo escoamento (deve ser mencionado que este tema de pesquisa já está sendo desenvolvido por Matos (2001) como parte de sua tese de doutoramento).

vi) Análise de efeitos de compressibilidade sobre o escoamento

A vasta maioria dos trabalhos de simulação do escoamento em válvulas adota a formulação de escoamento incompressível. No entanto, sabe-se que os valores de número de Mach alcançados no escoamento representam uma condição de escoamento compressível. Por esta razão, um passo natural da investigação será explorar os efeitos da compressibilidade sobre a distribuição de pressão na palheta, regiões de recirculação e níveis de turbulência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boussinesq, J. "Essai Sur la Théorie des Aux Courantes", Mem. Présentés Acad. Sci., vol. 23, p. 46, 1877.
- Deschamps, C. J., Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., "Análise da Influência do Comprimento do Orifício de Passagem no Escoamento em Difusores Radiais", IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, pp. 335-338, 1987.
- Deschamps, C.J., "Escoamento Laminar Através de Válvulas de Compressores", Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, 1987.
- Deschamps, C. J., Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., "Aplicação do Modelo k- ϵ Para o Escoamento Turbulento em Válvulas de Compressores", ENCIT, pp. 259-262, 1988.
- Deschamps, C. J., Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., "The Effective Flow and Force Areas in Compressor Valves", International Compressor Engineering Conference at Purdue, pp. 104-111, 1988.
- Deschamps, C. J., Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., "Modelagem de um Escoamento Turbulento em Presença de Estagnação, Recirculação, Aceleração e Gradientes de Pressão Adversos", X Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ, pp. 57-60, 1989.
- Deschamps, C. J., Prata, A. T., Ferreira, R. T. S., "Turbulent Flow Through Reed Type Valves of Reciprocating Compressors", ASME Int. Mech. Eng. Congress and Exhibition, Atlanta, 1996.
- Deschamps, C.J. "Escoamento em Válvulas de Compressores", Relatório Técnico do Convênio de Cooperação Técnico-Científica entre EMBRACO e UFSC, p.40, 1999.
- Dossat, R. J., "Princípios de Refrigeração", Ed. Hemus, São Paulo, 1980.
- Ervin, J. S., Suryanarayana, N. V., Hon Chai Ng, "Radial, Turbulent Flow of a Fluid Between Two Coaxial Disks", Journal of Fluids Engineering, vol. 111, pp. 378-383, 1989.

- Faghri, M., Sparrow, E. M., Prata, A. T., "Finite-Difference Solutions of Convection-Diffusion Problems in Irregular Domains, Using a Nonorthogonal Coordinate Transformation", Numerical Heat Transfer, vol. 7, pp. 183-209, 1984.
- Ferreira, R. T. S., Driessen, J. L., "Analysis of the Influence of Valve Geometric Parameters on the Effective Flow and Force Areas", 9th Purdue Int. Compressors Technology Conference, West Lafayette, USA, pp. 632-646, 1986.
- Ferreira, R. T. S., Prata, A. T. and Deschamps, C. J., "Laminar Fluid Flow in Compressor Valves- Numerical and Experimental Results", Forum of Fluid Flow and Heat Transfer in Reciprocating Machinery, ASME Winter Annual Meeting, Boston, USA, FED - 62 / HTD - 93, pp. 33-38, 1987.
- Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., Deschamps, C. J., "Pressure Distribution Along Valve Reeds of Hermetic Compressors", Experimental Thermal and Fluid Science, pp. 201-207, 1989.
- Fleming, J. S., Brown, J., "An Experimental Investigation of the Aerodynamics of a Disc Valve", International Compressor Engineering at Purdue, pp. 21-25, 1982.
- Fluent V4.2, Fluent Incorporate Inc., Centerra Resource Park, 10, Cavendish Court, Lebanon, New Hampshire, USA, 03766, 1993.
- Gans, R. F., Johnson, A. G., "Radial Flow Between Axisymmetric Nonparallel Plates of Small Slope", Journal of Tribology, vol. 110, pp. 342-347, 1988.
- Gashe, J. L., "Escoamento Laminar Através de Válvulas Excêntricas de Compressores de Refrigeração", Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, 1992.
- Ghia, U., Ghia, K. N., Shin, C. T., "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method", Journal of Computational Physics, vol.48, pp. 387-411, 1982.
- Giacomelli, G., Falciani, S., Manetti, S., "New System to Simulate the Influence of Pressure Pulsation on Reciprocating Compressor Valve Behavior", Quad. Pignone n 46, pp. 5-17, 1988.
- Gosney, W. B., "Principles of Refrigeration", Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

- Harlow, F. H., Nakayama, P. I., "Turbulence Transport Equations", *Physics of Fluids*, vol. 10(11), p. 2323, 1967.
- Hayashi, S., Matsui, T., Ito, T., "Study of Flow and Thrust in Nozzle-Flapper Valves", *ASME Journal of Fluids Engineering*, vol. 97, pp. 39-50, 1975.
- Hayase, T., Humphrey, C. e Greif, R., "A Consistent Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures", *Journal of Computation Physics*, vol. 98, pp. 108-118, 1992.
- Ishisawa, S., Watanabe, T., Takahashi, K., "Unsteady Viscous Flow Between Parallel Disks With a Time-Varying Gap Width and a Central Fluid Source", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 109, pp. 394-402, 1987.
- Jackson, J. D., Symmons, G. R., "An Investigation of Laminar Radial Flow Between Two Parallel Discs", *Appl. Sci. Res., Section A*, vol. 15, pp. 59-75, 1965.
- Jones, W. P., Launder, B. E. "The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15, 301-314, 1972.
- Jones, W.P., Launder, B.E. "The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena With a Two-Equation Model of Turbulence", *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 16, 1119-1130, 1973.
- Killman, I. G., "Aerodynamic Forces Acting on Valve Discs", *International Compressor Engineering at Purdue*, 1972.
- Kolmogorov, A. N. , "Equations of Turbulent Motion of an Incompressible Fluid", *Izvestia Academy of Sciences, USSR; Physics*, vol. 6, Nos. 1 and 2, pp. 56-58, 1942.
- Langer, C. A., Prata, A. T., Ferreira, R. T. S., "Separação e Bifurcação de Escoamentos em Difusores Radiais", *III Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas*, Itapema, SC, pp. 357-362, 1990.
- Langer, C. A., Ferreira, R. T. S., Prata, A. T., "Escoamento Turbulento através de Válvulas de Compressores", *Relatório de Pesquisa do Convênio de Cooperação Técnico-Científica entre UFSC e EMBRACO*, 142 p., abril de 1993.
- Langer, C. A., "Separação, Bifurcação e Transferência de Calor em Escoamentos Radiais", *Dissertação de Mestrado*, UFSC, Florianópolis, SC, 1991.

- Langer, C. A., Prata, A. T., Ferreira, R. T. S., "Transferência de Calor em Escoamentos Radiais", XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília, Brasil, pp. 625-628, 1993.
- Launder, B. E., Sharma, B. I., "Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc", Letters in Heat and Mass Transfer, vol. 1 No. 2, pp. 131-138, 1974.
- Launder, B. E., Spalding, D. B., "Lectures in Mathematical Models of Turbulence", Academic Press, London, 1972.
- Launder, B. E., Spalding, D. B., "The Numerical Computation of Turbulent Flows", Comp. Meths. Appl. Mech. Engng., vol. 3, pp. 269-289, 1974.
- Leonard, B. P., "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", Comp. Meths. Appl. Mech. Engng., vol. 19, pp. 59-98, 1979.
- Livesey, J. L., "Inertia Effects in Viscous Flows", Int. J. Mech. Sci., vol. I, pp. 84-88, 1960.
- Lopes, M. N., "Uma Metodologia Numérica Para a Análise do Comportamento Dinâmico de Válvulas Tipo Palheta em Escoamentos Periódicos", Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, 1996.
- Lopes, M. N. e Prata, A. T. "Comportamento Dinâmico de Válvulas Tipo Palheta em Escoamentos Periódicos", COB 1138, Anais do XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (CD-ROM), Bauru, SP, 1997.
- Maliska, C. R., "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, 1995.
- Marple, V. A., Liu, B. Y. and Whitby, K. T., "Fluid Mechanics of the Laminar Aerosol Impactor", Aerosol Science, vol. 5, pp. 1-16, 1974.
- Matos, F.F.S. "Análise Numérica do Comportamento Dinâmico de Válvulas Tipo Palheta em Compressores Alternativos", Tese de Doutorado, UFSC, Florianópolis, SC, 2001 (em conclusão).
- Mochizuki, S., Yao, M., "Flow Separation and Heat Transfer in Radial Flows Between Two Parallel Disks", Heat Transfer Japanese Research 12(1), pp. 48-63, 1983.

- Moller, P. S. "Radial Flow Without Swirl Between Parallel Discs", *The Aeronautical Quarterly*, pp. 163-185, 1963.
- Moller, P. S. "Radial Flow Without Swirl Between Parallel Discs Having Both Supersonic and Subsonic Regions", *The Aeronautical Quarterly*, pp. 163-185, 1966.
- Nagano, Y. e Hishida, M. "Improved Form of the k- ϵ Model for Wall Turbulent Shear Flows", *J. Fluids Engineering*, v. 109, pp. 156-159, 1987.
- Orzag, S. A., Yakhot, V., Flannery, W. S., Boysan, F., Choudhury, D., Marusewski, J., Patel, B., "Renormalization Group Modeling and Turbulence Simulations", *Near-wall Turbulent Flows*. Elsevier Science Publisher, 1993.
- Patankar, S. V., "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Washington D. C., Hemisphere Publ. Corp, 1980.
- Peters, S., Prata, A. T., "Estabilidade Hidrodinâmica de Escoamentos em Difusores Radiais", XVI Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, pp. 572-581, 1995a.
- Peters, S. e Prata, A.T. "Transferência de Calor em Difusores Radiais com Alimentação Axial", XIII Congresso Brasileiro e II Congresso Ibero-Americano de Engenharia Mecânica, Belo Horizonte, MG, CDRom, 1995b.
- Piechna, J. R., Meier, G. E. A., "Numerical Investigation of Steady and Unsteady Flow in Valve Gap", *International Compressor Engineering at Purdue*, pp. 1-14, 1986.
- Possamai, F. C., "Escoamento Laminar Através de Válvulas Inclínadas de Compressores de Refrigeração", Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, SC, 1994.
- Possamai, F.C., Ferreira, R.T.S. and Prata, A.T. "Pressure Distribution in Laminar Radial Flow Through Inclined Valve Reeds", *Symposium on Heat Pump and Refrigeration Systems Design, Analysis and Applications*, ASME International Mechanical Engineering Congress, AES-Vol. 34, pp. 107-119, 1995.
- Prandtl, L., "Berich Über Untersuchungen Zur Ausgebildeten Turbulenz", *ZAMM*, pp.5:136, 1925.

- Prandtl, L., "Über ein neues formelsystem für die ausgebildete turbulenz", Nachr. Akad. Wiss., Math.- Phys. Kl., vol. 6, pp. 6-19, 1945.
- Prata, A. T., Ferreira, R. T. S., "Heat Transfer and Fluid Flow Considerations in Automatic Valves of Reciprocating Compressors", International Compressor Engineering at Purdue, pp.512-521, 1990.
- Prata, A.T., Ferreira, R.T.S., Pilichi, C.M. e Todescat, M.L. "Heat Transfer Enhancements Due to Self-Sustained Flow Oscilations in Radial Diffusers", Proceedings of the Second World Conference on Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics, pp. 1288-1294, Dubrovnik, Iugoslavia, 1991.
- Prata, A. T., Pilichi, C. D. M., Ferreira, R. T. S., "Local Heat Transfer in Axially Feeding Radial Flow Between Parallel Disks", Journal of Heat Transfer, vol. 117, pp.47-53, 1995.
- Raal, J. D., "Radial Source Flow Between Parallel Disks", J. Fluid Mech., vol. 85, part 3, pp. 401-416, 1978.
- Reynolds, O., "On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion", Phil. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, pp.186:123-164, 1895.
- Rodi, W., Mansour, N. N., Michelassi, V., "One-Equation Near-Wall Turbulence Modelling with the Aid of Direct Simulation Data", ASME Journal of Fluids Engineering, vol. 115, pp. 196-205, 1990.
- Rodi, W., Spalding, D. B., "A Two-Parameter Model of Turbulence and its Application to Free Jets", Wärme-und Stoffübertragung, vol. 3, 2, pp. 85-95, 1970.
- Saffman, P.G. "A Model for Inhomogeneous Turbulent Flow", Proc. Roy. Soc., London, vol. A317, pp. 417-433, 1970.
- Saffman, P. G., Wilcox, D. C., "Turbulence-Model Predictions for Turbulent Boundary Layers", AIAA Journal, vol. 12, No. 4, pp. 541-546, 1974.
- Salinas Casanova, D.A., Deschamps, C.J. e Prata, A.T. "Turbulent Flow Through a Valve with Inclined Reeds", International Conference on Compressors and Their Systems, pp. 443-452, London, 1999.

- Savage, S. B., "Laminar Radial Flow Between Parallel Plates", *Journal of Applied Mechanics*, Dezembro, vol. 31, pp. 594-596, 1964.
- Silveira Neto, A., "Simulação de Grandes Escalas", In: Freire, A.P.S., Menut, P.P.M., Jian, S. (eds.), "Minicursos da I Escola Brasileira de Transição e Turbulência", ABCM, Rio de Janeiro, RJ, pp. 1-48, 1998.
- Speziale, C.G., Abid, R. e Anderson, E.C. "A Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near Wall Turbulence", *AIAA Paper 90-1481*, Seattle, WA, 1990.
- Soedel, W., "Introduction to Computer Simulation of Positive Displacement Type Compressors", R.W. Herrick Laboratories, 1972.
- Tabatabai, M., Pollard, A., "Turbulence in Radial Flow Between Parallel Disks at Medium and Low Reynolds Numbers", *J. Fluid Mech.*, vol. 185, pp. 483-502, 1987.
- Takenaka, T., Yamane, R. and Iwamizu, T., "Thrust of the Disc Valves", *Bulletin of JSME*, vol. 7 n 27, pp. 558-566, 1964.
- Talpallikar, M. V., Yang, H. Q., Przekwas, A. J., "Numerical Analysis of Turbulent Flow in I. C. Engine Port/Valve Assembly", *Am. Soc. Mech. Eng. Pap. – Energy-Sources Technology Conference and Exhibition, ICE 10 6p*, 1990.
- Tennekes, H. e Lumley, J.L. "A First Course in Turbulence", MIT Press, 1972.
- Todescat, M. L., Prata, A. T., Ferreira, R. T. S., "Transferência de Calor Laminar em Válvulas de Compressores", *Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas*, pp. 255-258, 1988.
- Trella, T. J., Soedel, W., "Effect of Valve Port Gas Inertia on Valve Dynamics-Part I: Simulation of a Poppet Valve", *International Compressor Engineering at Purdue*, pp. 190-197, 1974.
- Trella, T. J., Soedel, W., "Effect of Valve Port Gas Inertia on Valve Dynamics-Part II: Flow Retardation at Opening", *International Compressor Engineering at Purdue*, pp. 198-207, 1974.
- Wark, C. E., Foss, J. F., "Forces Caused by the Radial Out Flow Between Parallel Disks", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 106, pp. 292-297, 1984.

- Wilcox, D.C. e Alber, I.E. "A Turbulence Model for High Speed Flows", Proc. 1972 Heat Trans. & Fluid Mech. Isnt., Stanford Univ. Press, pp. 231-252, 1972.
- Wilcox, D. C., Chambers, T. L., "Further Refinement of the Turbulence-Model Transition-Prediction Technique", DCW Industries Report DCW-R-03-02, La Cañada, CA, 1975.
- Wilcox, D.C., Traci, R.M. "A Complete Model of Turbulence", AIAA Paper 76-351, San Diego, CA, 1976.
- Wilcox, D.C., Rubesin, M.W. "Progress in Turbulence Modeling for Complex Flow Fields Including Effects of Compressibility", NASA TP-1517, 1980.
- Wilcox, D. C. "Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models", AIAA Journal, vol. 26, No. 11, pp.1299-1310, 1988.
- Wilcox, D.C. "Turbulence Modeling for CFD", DCW Industries, 1994.
- Woolard, H. W., "A Theoretical Analysis of the Viscous Flow in Narrowly Spaced Radial Difuser", Journal of Applied Mechanics, March, pp. 9-15, 1957.
- Woollat, D., Wertheimer, H. P., "Improved Accuracy in the Calculation of Valve Dynamics in Reciprocating Compressors", Am. Soc. Mech. Eng. Pap.-Energy-Sources Technology Conference and Exhibition, ICE3 7p, 1990.
- Yakhot, V. e Orzag, S.A. "Renormalization Group Analysis of Turbulence. Basic Theory", J. Sci. Comput., vol. 1, pp. 3-51, 1986.

APÊNDICE I

EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA A ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA k

A equação de Navier-Stokes na forma indicial e sem forças de campo é dada por,

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (I.1)$$

onde ' \sim ' indica a propriedade instantânea.

Assumindo que as propriedades instantâneas são iguais à soma de uma propriedade média U_i , mais uma flutuação u_i , tem-se da equação (I.1),

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_i + u_i) + (U_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(P + p) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(U_i + u_i) \quad (I.2)$$

Fazendo a média temporal da equação (I.2), tem-se,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(U_i + u_i) + (U_j + u_j) \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u_i)} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(P + p)} + \nu \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(U_i + u_i)} \quad (I.3)$$

Agrupando a equação (I.3), e lembrando que $\overline{U_i} = U_i$, tem-se,

$$\frac{\partial}{\partial t}(U_i + \bar{u}_i) + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{(P + p)} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(U_i + \bar{u}_i) \quad (I.4)$$

Como a média da flutuação é igual a zero ($\overline{u_i} = 0$), tem-se da equação anterior,

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (I.5)$$

Subtraindo a equação (I.5) da equação (1.2) obtém-se uma equação para as flutuações,

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (I.6)$$

Ordenando e multiplicando por u_i a equação acima,

$$u_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{u_i}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + u_i \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \quad (I.7)$$

Fazendo a média temporal da equação (I.7),

$$\overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \overline{u_i \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2}} \quad (I.8)$$

Simplificando termo a termo a equação (I.8), tem-se,

- $\frac{\partial(\overline{u_i u_i})}{\partial t} = \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} + \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} = 2 \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} \quad \Rightarrow \quad \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_i})$
- $\overline{u_i U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = U_j \overline{u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{2} U_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_i}) \quad (\text{da equação acima}) \quad \overline{u_i u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$
- $\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i^2 u_j}) = \overline{u_i^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + 2 \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = 0 + 2 \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (\text{pela continuidade})$
- $\Rightarrow \quad \overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i^2 u_j})$

$$\begin{aligned}\overline{u_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} &= \overline{u_i u_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (\overline{u_i} = 0) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i p}) &= \frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\overline{p}}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = \frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + 0 \quad (\text{pela continuidade}) \\ \Rightarrow \quad \frac{\overline{u_i}}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i p})\end{aligned}$$

Substituindo os termos acima, na equação (I.8),

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_i}) + \frac{1}{2} U_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_i}) + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i^2 u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i p}) + \overline{u_i v} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \quad (\text{I.9})$$

Ordenando,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \right) = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{u_i u_i} u_j}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i p}) + \overline{v u_i} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \quad (\text{I.10})$$

Fazendo $\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i p}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j p})$, o segundo e terceiro termo do lado direito da equação (I.10)

podem ser agrupados. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2} \right) + U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2} \right) = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j \left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \right] + \overline{v u_i} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \quad (\text{I.11})$$

Substituindo $k = \frac{\overline{u_i u_i}}{2}$ na equação anterior, tem-se,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{u_j \left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \right] + \overline{v u_i} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \quad (\text{I.12})$$

Fazendo,

$$\begin{aligned}
 v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) &= v u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + v \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
 \Rightarrow v u_j \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) &= v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - v \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}
 \end{aligned}$$

Substituindo o último termo da equação (1.12) pela expressão acima,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] + v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - v \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (I.13)$$

Ordenando,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] + v \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_j u_j}{2} \right) \right] - v \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (I.14)$$

Finalmente, a equação de transporte exata de k é dada por,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[u_j \left(\frac{u_i u_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - v \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (I.15)$$

onde,

$$\varepsilon = v \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Para a utilização da equação de transporte de k, são necessárias algumas modelações na equação (I.15), devido ao aparecimento de novas correlações. A obtenção da forma aproximada da equação é mostrada no item 3.3.2, e é dada pela equação (3.32).

APÊNDICE II

EQUAÇÃO DE TRANSPORTE PARA A DISSIPACÃO ε

De maneira similar à equação de k , a dedução da equação de ε se faz através da equação de Navier-Stokes, a qual para propriedades instantâneas (com ρ e μ constantes) é:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k^2} \quad (\text{II.1})$$

onde ' \sim ' indica a propriedade instantânea. Diferenciando a equação anterior em relação a x_j ,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\tilde{u}_k \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_k^2} \right) \quad (\text{II.2})$$

Fazendo $\tilde{u}_i = U_i + u_i$ na equação (II.2), onde U_i indica a velocidade média e u_i a flutuação da velocidade, tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial t} (U_i + u_i) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(U_k + u_k) \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i + u_i) \right] = \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (U_i + u_i) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Multiplicando a equação anterior por $2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$,

$$\begin{aligned}
2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial t} (U_i + u_i) \right] + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(U_k + u_k) \frac{\partial}{\partial x_k} (U_i + u_i) \right] = \\
- 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (P + p) \right] + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (U_i + u_i) \right]
\end{aligned} \quad (II.4)$$

Fazendo a média temporal e expandindo a equação (II.4),

$$\begin{aligned}
2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial t} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} + \\
+ 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]} = \\
2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + \\
+ 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
\end{aligned} \quad (II.5)$$

Simplificando a equação (II.5),

$$\begin{aligned}
2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} + \\
+ 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} = \\
- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
\end{aligned} \quad (II.6)$$

O 1º termo do lado esquerdo da equação (II.6) pode ser expresso como sendo,

$$2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)} = \frac{\partial}{\partial t} \left[v \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \right]$$

Manipulando o 2º termo do lado esquerdo da equação (II.6) tem-se,

$$\begin{aligned}
 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) &= 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left[U_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right] \\
 &= 2\nu U_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \\
 &= 2\nu U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \\
 &= U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}
 \end{aligned}$$

Substituindo o 1º e 2º termos do lado esquerdo da equação (II.6) por suas novas expressões, passando o 3º e 4º termos do lado esquerdo para o lado direito, e fazendo ,

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)$$

(da equação de k), tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} &= -2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \\
 &\quad - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + \\
 &\quad + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right) - 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}
 \end{aligned} \tag{II.7}$$

No 1º termo do lado direito da equação (II.7) troca-se 'j' por 'k', e no último termo do mesmo lado troca-se 'i' por 'k',

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)} + \\
& - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + \\
& + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}
\end{aligned} \tag{II.8}$$

Fatorando $2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ do 1º e último termo do lado direito da equação (II.8), tem-se,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
& - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_k \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} + \\
& - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
\end{aligned} \tag{II.9}$$

Para chegar à equação (II.9) foi assumido que,

$$\overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}}$$

No 2º termo do lado direito troca-se 'j' por 'k', e permuta-se a derivada segunda,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
& - 2\nu u_j \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} + \\
& - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
\end{aligned} \tag{II.10}$$

Expandindo o 3º termo do lado direito da equação (II.10),

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
 & -2\nu \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \\
 & -2\nu \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + \\
 & + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

Trocando 'j' por 'k' no 3º termo do lado direito da equação (II.11), e ordenando,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
 & -2\nu \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \\
 & -2\nu \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + \\
 & + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
 \end{aligned} \tag{II.12}$$

O 5º termo do lado direito da equação acima pode ser escrito como,

$$\begin{aligned}
 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} &= \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} \\
 &= \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)} \\
 &= \frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)} + 0 \quad (\text{equação da continuidade}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)
 \end{aligned}$$

Substituindo a expressão anterior, na equação (II.12), tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
 & -2\nu u_j \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \\
 & -2\nu u_k \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) + \\
 & + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
 \end{aligned} \tag{II.13}$$

O 4º termo do lado direito da equação (II.13) pode ser escrito como,

$$\begin{aligned}
 2\nu u_k \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[v u_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Substituindo a expressão acima, na equação (II.13), tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) + \\
 & -2\nu u_j \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k}} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \\
 & - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2\nu}{\rho} \overline{\frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}} \right) + \\
 & + 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \right)}
 \end{aligned} \tag{II.14}$$

Somando e diminuindo o termo $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right)$ da equação (II.14), ela não se altera. Isto é,

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ v \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - v^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2v^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2 \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right]^2 - 2v^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Trocando a ordem de derivação no último termo da expressão anterior, tem-se,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2 \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right]^2 - 2v^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right]$$

Trocando 'j' por 'k' no último termo da igualdade acima,

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2 \left[v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right]^2 - 2v^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right]$$

Somando a equação anterior com a equação (II.14), e mantendo a mesma ordem, tem-se,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) - 2\nu u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} + \\
 & -2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \\
 & + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) - 2 \left[\overline{v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \right]^2 + \\
 & - 2\nu^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{II.15}$$

Ordenando e simplificando a equação (II.15), chega-se finalmente à forma exata da equação de ε ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \left(\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} \right) - 2\nu u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_k} + \\
 & - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} - 2 \left(\overline{v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v u_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2} + \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]
 \end{aligned} \tag{II.16}$$

A obtenção da forma aproximada da equação (II.6) é mostrada no item 3.3.3, e é dada pela equação (3.39).

ESQUEMA DE INTERPOLAÇÃO QUICK

Na discretização das equações de conservação, torna-se necessária a avaliação das propriedades nas faces do volume de controle. Para tal existem vários métodos de interpolação utilizados na atualidade, dentre os quais encontra-se o método de interpolação *QUICK* proposto inicialmente por Leonard (1979) e com várias modificações posteriores. A particularidade deste método de interpolação, é que ele se utiliza de três pontos para realizar a aproximação da propriedade na face. Utiliza dois pontos a montante e um a jusante da face em questão, sempre dependendo do sentido do fluxo. A propriedade é aproximada então através de uma função quadrática. A figura V.1 mostra um esquema de interpolação utilizando *QUICK*, onde a propriedade na face é interpolada usando os valores da propriedade nos pontos nodais *W*, *P* e *E*.

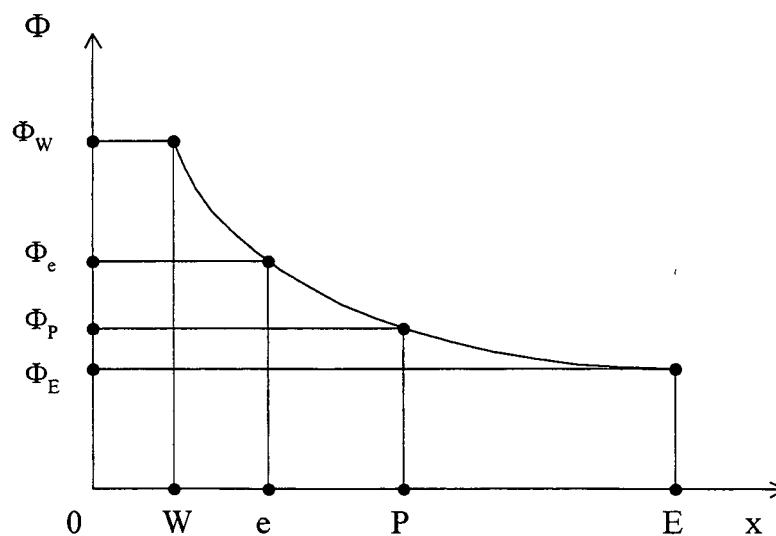


Figura III.1: Interpolação usando o esquema *QUICK*.

A maneira de exemplo é para mostrar o procedimento a ser seguido na utilização do esquema, será avaliada a propriedade Φ na face e , isto é, será calculada a propriedade Φ_e . A figura V.2 mostra um esquema dos pontos nodais utilizados para interpolar a propriedade na face e .

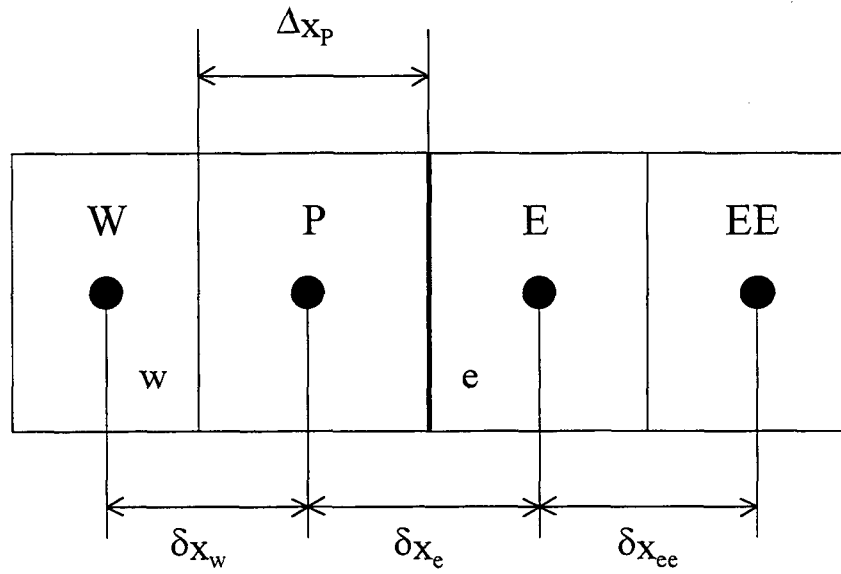


Figura III.2: Distribuição dos pontos nodais utilizados para o cálculo da propriedade na face e , usando o esquema de interpolação *QUICK*.

No esquema de interpolação *QUICK*, a propriedade na face é avaliado segundo o sentido do fluxo convectivo nas faces, escrevendo-se,

$$F_e \Phi_e = F_e^+ \Phi_e^+ + F_e^- \Phi_e^- \quad (\text{III.1})$$

onde,

$$F_e^+ = \begin{cases} \rho U_e A_e & , U_e > 0 \\ 0 & , U_e < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad F_e^- = \begin{cases} 0 & , U_e > 0 \\ \rho U_e A_e & , U_e < 0 \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Na versão do esquema de interpolação *QUICK* de Hayase (1992), a propriedade na face é dada por:

$$\Phi_e^+ = \Phi_p + S_e^+ \quad \text{e} \quad \Phi_e^- = \Phi_E + S_e^- \quad (\text{III.3})$$

Os termos S que aparecem nas expressões acima, são termos fonte que são aproximados através de uma função quadrática da forma $\Phi(x) = \Phi_i + Ax^2 + Bx + C$, onde Φ_i é o valor da propriedade no ponto nodal a montante da face em questão. A aproximação da função quadrática depende do sentido do fluxo, considerando sempre para o ajuste da função, dois pontos a montante e um ponto a jusante da face em questão.

Devido ao valor da propriedade na face depender do sentido do fluxo, é necessária a aproximação de duas funções quadráticas. A seguir mostra-se o procedimento a ser seguido para este fim.

i) Determinação de Φ_e^+ ($F_e > 0$)

O valor é aproximado através da função,

$$\Phi = \Phi_p + Ax^2 + Bx + C = \Phi_p + S_e^+ \quad (\text{III.4})$$

Da figura III.2, observa-se que a função quadrática deve ser ajustada através dos valores das propriedades nos pontos nodais W , P e E . Tomando o ponto W como ponto de referência, procede-se ao cálculo dos coeficientes da função,

Para $x = 0$:

$$\Phi_w = \Phi_p + C$$

assim,

$$C = \Phi_w - \Phi_p \quad (\text{III.5})$$

Para $x = \delta x_w$:

$$\Phi_p = \Phi_p + A\delta^2 x_w + B\delta x_w + C$$

donde,

$$A\delta^2 x_w + B\delta x_w + C = 0 \quad (\text{III.6})$$

Para $x = \delta x_w + \delta x_e$:

$$\Phi_E = \Phi_P + A(\delta x_w + \delta x_e)^2 + B(\delta x_w + \delta x_e) + C$$

ou,

$$A(\delta x_w + \delta x_e)^2 + B(\delta x_w + \delta x_e) + C + (\Phi_P - \Phi_E) = 0 \quad (\text{III.7})$$

Das equações III.6 e III.7, se obtém uma expressão para a constante B,

$$B = \frac{C[(\delta x_w + \delta x_e)^2 - \delta^2 x_w] + \delta^2 x_w (\Phi_E - \Phi_P)}{\delta^2 x_w (\delta x_w + \delta x_e) - \delta x_w (\delta x_w + \delta x_e)^2} \quad (\text{III.8})$$

Da equação (III.6) se obtém uma expressão para a constante A,

$$A = -\left(\frac{B}{\delta x_w} + \frac{C}{\delta^2 x_w} \right) \quad (\text{III.9})$$

Calculados os coeficientes da função procede-se ao cálculo da propriedade na face através da equação III.4. Da figura III.2, tem-se que, para a face e , $x = \delta x_w + \frac{\Delta x_p}{2}$, assim,

$$\Phi_e^+ = \Phi_P + S_e^+$$

onde,

$$S_e^+ = A\left(\delta x_w + \frac{\Delta x_p}{2}\right)^2 + B\left(\delta x_w + \frac{\Delta x_p}{2}\right) + C \quad (\text{III.10})$$

Os valores das constantes A, B e C são calculados das expressões III.9, III.8 e III.5, respectivamente.

ii) Determinação de Φ_e^- ($F_e < 0$)

Observando a figura III.2, o ajuste da curva deve ser feito através dos valores das propriedades dos pontos nodais P, E e EE. Neste caso, a função de interpolação toma a seguinte forma,

$$\Phi(x) = \Phi_E + Ax^2 + Bx + C = \Phi_E + S_e^- \quad (\text{III.11})$$

Adotando como referência o ponto P, procede-se ao cálculo dos coeficientes da função quadrática.

Para $x = 0$:

$$\Phi_P = \Phi_E + C$$

ou,

$$C = \Phi_P - \Phi_E \quad (\text{III.12})$$

Para $x = \delta x_e$:

$$\Phi_E = \Phi_E + A\delta^2 x_e + B\delta x_e + C$$

donde,

$$A\delta^2 x_e + B\delta x_e + C = 0 \quad (\text{III.13})$$

Para $x = \delta x_e + \delta x_{ee}$:

$$\Phi_{EE} = \Phi_E + A(\delta x_e + \delta x_{ee})^2 + B(\delta x_e + \delta x_{ee}) + C$$

ou,

$$A(\delta x_e + \delta x_{ee})^2 + B(\delta x_e + \delta x_{ee}) + C + (\Phi_E - \Phi_{EE}) = 0 \quad (\text{III.14})$$

Resolvendo as equações III.13 e III.14 se obtém o valor da constante B,

$$B = \frac{C[(\delta x_e + \delta x_{ee})^2 - \delta^2 x_e] + (\Phi_{EE} - \Phi_E)\delta^2 x_e}{\delta^2 x_e(\delta x_e + \delta x_{ee}) - \delta x_e(\delta x_e + \delta x_{ee})^2} \quad (\text{III.15})$$

Da equação III.13 se obtém o valor da constante A,

$$A = -\left(\frac{B}{\delta x_e} + \frac{C}{\delta^2 x_e}\right) \quad (\text{III.16})$$

Com as constantes calculadas, o valor da propriedade na face é calculada através da equação

III.11. Da figura III.2 tem-se que $x = \frac{\Delta x_p}{2}$ na face e , assim,

$$\Phi_e^- = \Phi_E + S_e^-$$

onde,

$$S_e^- = A\left(\frac{\Delta x_p}{2}\right)^2 + B\left(\frac{\Delta x_p}{2}\right) + C \quad (\text{III.17})$$

Os valores das constantes A, B e C são calculados das equações III.16, III.15 e III.12, respectivamente.

O procedimento mostrado acima segue-se também para determinar os valores da propriedade na face w . Este procedimento estende-se para situações bi e tridimensionais, levando sempre em consideração o sentido do fluxo convectivo para a aproximação da função quadrática.

APÊNDICE IV

EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DO ESCOAMENTO MÉDIO

A seguir é realizada a média das equações de conservação do escoamento tridimensional em coordenadas cilíndricas:

- Equação de Conservação da Quantidade de Movimento na direção Axial (x)
(Componente de velocidade \tilde{u}):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{u}) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \tilde{w} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \tilde{v} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \tilde{u} \tilde{u}) \right] = \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \quad (\text{IV.1})$$

- Equação de Conservação da Quantidade de Movimento na direção Radial (r)
(Componente de velocidade \tilde{v}):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{v}) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \tilde{w} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \tilde{v} \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \tilde{u} \tilde{v}) \right] = \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} \right) \right] + \\ - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} - \frac{\mu \tilde{v}}{r^2} + \frac{\rho \tilde{w}^2}{r} - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

- Equação de Conservação da Quantidade de Movimento na direção Circunferencial (θ)
(Componente de velocidade \tilde{w}):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \tilde{w}) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \tilde{w} \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \tilde{v} \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \tilde{u} \tilde{w}) \right] = \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} \right) \right] + \\ + 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} - \frac{\mu \tilde{w}}{r^2} - \frac{\rho \tilde{w} \tilde{v}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.3})$$

- Equação de Conservação da Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \tilde{w}) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \tilde{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \tilde{u}) \right] = 0 \quad (\text{IV.4})$$

Nas equações acima, $\tilde{\phi}_i$ indica a propriedade instantânea, que, para realizar a média temporal das equações, é substituída por,

$$\tilde{\phi}_i = \Phi_i + \phi_i \quad (\text{IV.5})$$

onde, Φ_i indica a média da propriedade instantânea, e ϕ_i a flutuação da propriedade instantânea. As flutuações da massa específica estão sendo desprezadas nas equações, o que pode ser observado ao não ser escrita como propriedade instantânea.

- Média da Equação de Conservação na Direção Axial
(Componente de velocidade U):

Realizando a média da equação termo a termo, tem-se,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} (\rho \tilde{u})} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} [\rho (U + u)]} = \frac{\partial}{\partial t} [\rho (U + \bar{u})] = \frac{\partial}{\partial t} (\rho U) \quad (\text{IV.6})$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \tilde{w} \tilde{u})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial \theta} [\rho (W + w)(U + u)]} = \frac{\partial}{\partial \theta} [\rho (WU + W\bar{u} + \bar{w}U + \overline{wu})] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho WU) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \overline{wu}) \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial r} (\rho r \tilde{v} \tilde{u})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial r} [\rho r (V + v)(U + u)]} = \frac{\partial}{\partial r} [\rho r (VU + V\bar{u} + \bar{v}U + \overline{vu})] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} (\rho r VU) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \overline{vu}) \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial x} (\rho r \tilde{u} \tilde{u})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x} [\rho r (U + u)(U + u)]} = \frac{\partial}{\partial x} [\rho r (UU + U\bar{u} + \bar{u}U + \overline{uu})] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (\rho r UU) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \overline{uu}) \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta} \right)} &= \overline{\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (U + u) \right]} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (U + \bar{u}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.10})$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)} &= \overline{\frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (U + u) \right]} = \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (U + \bar{u}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.11})$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x} \left[r \frac{\partial}{\partial x} (U + u) \right]} = \frac{\partial}{\partial x} \left[r \frac{\partial}{\partial x} (U + \bar{u}) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (\text{IV.12})$$

$$\overline{\frac{\partial \bar{P}}{\partial x}} = \overline{\frac{\partial}{\partial x} (P + p)} = \frac{\partial}{\partial x} (P + \bar{p}) = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{IV.13})$$

Substituindo as expressões acima, na equação IV.1, tem-se,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W U) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \bar{w} u) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V U) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \bar{v} u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r U U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \bar{u} u) \right] = \\ \mu \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x}\end{aligned}\quad (\text{IV.14})$$

Ordenando a equação acima,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\rho U) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W U) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r U U) \right] &= \mu \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \\ &\quad - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \bar{w} u) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r \bar{v} u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r \bar{u} u) \right]\end{aligned}\quad (\text{IV.15})$$

Da Hipótese de Kolmogorov sabe-se que as tensões de Reynolds são dadas (na forma indicial) por,

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

As tensões de Reynolds em coordenadas cilíndricas são dadas por ,

$$\begin{aligned} -\overline{uu} &= 2\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} k & -\overline{uv} &= \nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \\ -\overline{vv} &= 2\nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} k & -\overline{vw} &= \nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \\ -\overline{ww} &= 2\nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right) - \frac{2}{3} k & -\overline{wu} &= \nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (IV.16)$$

Como o tensor de Reynolds é simétrico, tem-se que,

$$\overline{vu} = \overline{uv} \quad ; \quad \overline{wv} = \overline{vw} \quad ; \quad \overline{uw} = \overline{wu}$$

Fazendo as devidas substituições na equação IV.15,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W U) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V U) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U U) \right] &= \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \\ &- \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[2r \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} r p k \right] \end{aligned} \quad (IV.17)$$

Ordenando a equação anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W U) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V U) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U U) \right] &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_t}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu_t \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial x} + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} r p k \right] \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Definindo a viscosidade efetiva μ_e , como sendo igual à soma das viscosidades molecular e turbulenta, $\mu_e = \mu + \mu_t$, chega-se à media da equação de transporte para U,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left((\rho W U) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V U) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r U U) \right) \right] = \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_e \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu_e \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] + S + S_T \end{aligned} \quad (IV.19)$$

onde S é o termo fonte da equação, e S_T é o termo fonte adicional devido à turbulência. Os termos fonte são dados por,

$$S = -\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$S_T = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \mu_t \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{3} \rho k \right)$$

- Média da Equação de Conservação na Direção Radial
(Componente de velocidade V):

Fazendo a média temporal, termo a termo, da equação IV.2,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)} = \overline{\frac{\partial}{\partial t}[\rho(V + v)]} = \frac{\partial}{\partial t}[\rho(V + \overline{v})] = \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) \quad (IV.20)$$

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho w v)} &= \overline{\frac{\partial}{\partial \theta}[\rho(W + w)(V + v)]} = \frac{\partial}{\partial \theta}[\rho(WV + W\overline{v} + \overline{w}V + \overline{wv})] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WV) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \overline{wv}) \end{aligned} \quad (IV.21)$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial r}(\rho r \bar{v} \bar{v})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial r}[\rho r(V + v)(V + v)]} = \frac{\partial}{\partial r}[\rho r(VV + V\bar{v} + \bar{v}V + \bar{v}\bar{v})] \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(\rho r VV) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \bar{v}\bar{v})\end{aligned}\quad (\text{IV.22})$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial x}(\rho r \bar{u} \bar{v})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x}[\rho r(U + u)(V + v)]} = \frac{\partial}{\partial x}[\rho r(UV + U\bar{v} + \bar{u}V + \bar{u}\bar{v})] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho r UV) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \bar{u}\bar{v})\end{aligned}\quad (\text{IV.23})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta}\right)} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(V + \bar{v})\right] = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \quad (\text{IV.24})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r}\right)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial}{\partial r}(V + \bar{v})\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) \quad (\text{IV.25})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left[r \frac{\partial}{\partial x}(V + \bar{v})\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial V}{\partial x}\right) \quad (\text{IV.26})$$

$$2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta} = 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(W + \bar{w}) = 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (\text{IV.27})$$

$$\frac{\mu \bar{v}}{r^2} = \frac{\mu(V + \bar{v})}{r^2} = \frac{\mu V}{r^2} \quad (\text{IV.28})$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{\bar{w}^2}{r} &= \rho \frac{\bar{w}\bar{w}}{r} = \rho \frac{(\bar{w} + \bar{w})(\bar{w} + \bar{w})}{r} = \rho \frac{(\bar{w}\bar{w} + \bar{w}\bar{w} + \bar{w}\bar{w} + \bar{w}\bar{w})}{r} \\ &= \rho \frac{\bar{w}\bar{w}}{r} + \rho \frac{\bar{w}\bar{w}}{r}\end{aligned}\quad (\text{IV.29})$$

$$\overline{\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}} = \frac{\partial}{\partial r}(P + \bar{p}) = \frac{\partial P}{\partial r} \quad (\text{IV.30})$$

Substituindo as expressões acima, na equação IV.2,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \bar{w}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \bar{v}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \bar{u}\bar{v}) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial V}{\partial x}\right) \right] - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \mu \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W W}{r} + \rho \frac{\bar{w}\bar{w}}{r} - \frac{\partial P}{\partial r}\end{aligned}\quad (\text{IV.31})$$

Ordenando a equação acima,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) \right] = \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \\ - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \mu \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W W}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \overline{w v}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \overline{v v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \overline{u v}) \right] + \rho \frac{\overline{w w}}{r} \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Antes de continuar com o desenvolvimento da média da equação de V, será feito um parêntese para tratar de um assunto importante.

Quando se quer realizar a análise bidimensional de um escoamento, é necessário realizar primeiramente a média das equações de conservação na forma tridimensional, para logo após realizar as simplificações pertinentes à situação bidimensional. A importância deste procedimento pode ser entendido através da tensão de Reynolds que aparece no último termo do lado direito da equação IV.32. Utilizando a hipótese de Kolmogorov em coordenadas cilíndricas, dita tensão pode ser escrita como,

$$\overline{w w} = -2\nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right) + \frac{2}{3} k$$

Simplificando a expressão acima para o caso bidimensional, obtém-se,

$$\overline{w w} = -2\nu_t \frac{V}{r} + \frac{2}{3} k$$

Caso tivessem sido realizadas as simplificações nas equações de transporte para o caso bidimensional, antes de realizar a média temporal das mesmas, o termo acima não apareceria na equação de transporte de V, por terem sido simplificadas as velocidades W logo no início, o que incorreria em um erro na modelação.

Continuando com a obtenção da média da equação de V, as tensões de Reynolds que aparecem na equação (IV.32), são substituídas por suas expressões correspondentes, dadas nas equações IV.16,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) \right] &= \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \\
&- 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \mu \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W W}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[2 r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} r \rho k \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \\
&- 2 \frac{\mu_t}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right) + \frac{2}{3} \rho \frac{k}{r}
\end{aligned}
\tag{IV.33}$$

Ordenando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_t}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu r \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t r \frac{\partial V}{\partial x} \right) - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \\
&- \mu \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W W}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{W}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{2}{3} r \rho k \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] - 2 \frac{\mu_t}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right) + \frac{2}{3} \rho \frac{k}{r}
\end{aligned}
\tag{IV.34}$$

Fazendo $\mu_e = \mu + \mu_t$ e ordenando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e r \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \mu \frac{V}{r^2} - 2 \mu_t \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial r} + \\
&- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} r \rho k \right) + \frac{2}{3} \rho \frac{k}{r} - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \rho \frac{W^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \\
&- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{W}{r} \right) - 2 \frac{\mu_t}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right)
\end{aligned}
\tag{IV.35}$$

Fazendo $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} r \rho k \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{2}{3} \rho \frac{k}{r}$ na equação anterior, e simplificando,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) \right] &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e r \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \mu \frac{V}{r^2} - 2\mu_t \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial r} + \\ &- \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) - 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \rho \frac{W^2}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{\partial W}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{W}{r} \right) - 2 \frac{\mu_t}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (IV.36)$$

Ordenando a equação acima, chega-se à média temporal da equação de transporte de V,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W V) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U V) \right] &= \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e r \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] &+ S + S_T \end{aligned} \quad (IV.37)$$

onde,

$$\begin{aligned} S &= -2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} - \mu \frac{V}{r^2} + \rho \frac{W^2}{r} - \frac{\partial P}{\partial r} \\ S_T &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] - 2 \mu_t \frac{V}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mu_t \frac{W}{r} \right) + \\ &- 2 \frac{\mu_t}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{3} \rho k \right) \end{aligned}$$

- Média da Equação de Conservação na Direção Circunferencial
(Componente de velocidade W):

Realizando a média da equação IV.3, termo a termo, tem-se,

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{w})} = \overline{\frac{\partial}{\partial t}[\rho(W + w)]} = \frac{\partial}{\partial t}[\rho(W + \bar{w})] = \frac{\partial}{\partial t}(\rho W) \quad (IV.38)$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \bar{w} \bar{w})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial \theta}[\rho(W + w)(W + w)]} = \frac{\partial}{\partial \theta}[\rho(WW + W\bar{w} + \bar{w}W + \bar{w}\bar{w})] \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WW) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \bar{w}\bar{w})\end{aligned}\quad (\text{IV.39})$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial r}(\rho r \bar{v} \bar{w})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial r}[\rho r(V + v)(W + w)]} = \frac{\partial}{\partial r}[\rho r(VW + V\bar{w} + \bar{v}W + \bar{v}\bar{w})] \\ &= \frac{\partial}{\partial r}(\rho r VW) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \bar{v}\bar{w})\end{aligned}\quad (\text{IV.40})$$

$$\begin{aligned}\overline{\frac{\partial}{\partial x}(\rho r \bar{u} \bar{w})} &= \overline{\frac{\partial}{\partial x}[\rho r(U + u)(W + w)]} = \frac{\partial}{\partial x}[\rho r(UW + U\bar{w} + \bar{u}W + \bar{u}\bar{w})] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\rho r UW) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \bar{u}\bar{w})\end{aligned}\quad (\text{IV.41})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \theta}\right)} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(W + w)\right] = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta}\right) \quad (\text{IV.42})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \bar{w}}{\partial r}\right)} = \frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial}{\partial r}(W + w)\right] = \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial W}{\partial r}\right) \quad (\text{IV.43})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)} = \frac{\partial}{\partial x}\left[r \frac{\partial}{\partial x}(W + w)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(r \frac{\partial W}{\partial x}\right) \quad (\text{IV.44})$$

$$2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \theta} = 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}(V + v) = 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (\text{IV.45})$$

$$\frac{\mu \bar{w}}{r^2} = \frac{\mu(W + \bar{w})}{r^2} = \frac{\mu W}{r^2} \quad (\text{IV.46})$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{\bar{w} \bar{v}}{r} &= \rho \frac{(W + w)(V + v)}{r} = \rho \frac{(WV + W\bar{v} + \bar{w}V + \bar{w}\bar{v})}{r} \\ &= \rho \frac{WV}{r} + \rho \frac{\bar{w}\bar{v}}{r}\end{aligned}\quad (\text{IV.47})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(P + \bar{p}) = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \quad (\text{IV.48})$$

Substituindo as expressões acima, na equação IV.3,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho W) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WW) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \overline{w\overline{w}}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r VW) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \overline{v\overline{w}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r UW) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \overline{u\overline{w}}) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu \frac{W}{r^2} - \rho \frac{WV}{r} - \rho \frac{\overline{w\overline{v}}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

Ordenando a equação anterior,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho W) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WW) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r VW) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r UW) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu \frac{W}{r^2} + \\ - \rho \frac{WV}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho \overline{w\overline{w}}) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r \overline{v\overline{w}}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r \overline{u\overline{w}}) + \rho \overline{w\overline{v}} \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

Substituindo as tensões de Reynolds da equação anterior, por suas respectivas expressões dadas nas equações IV.16, se tem,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho W) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho WW) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r VW) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r UW) \right] = \\ \frac{\mu}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \\ + 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu \frac{W}{r^2} - \rho \frac{WV}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[2\mu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{V}{r} \right) - \frac{2}{3} \rho k \right] + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_t r \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \\ + \frac{1}{r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.51})$$

Ordenando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho W) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W W) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V W) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U W) \right] &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu r \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_t}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_t r \frac{\partial W}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t r \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \\
&+ 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu \frac{W}{r^2} - \rho \frac{W V}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_t}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + 2 \mu_t \frac{V}{r} - \frac{2}{3} \rho k \right) + \\
&+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_t \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \right]
\end{aligned}
\tag{IV.52}$$

Finalmente, fazendo $\mu_e = \mu + \mu_t$ na equação anterior, e ordenando os termos, é obtida a média temporal da equação de transporte de W ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho W) + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho W W) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r V W) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho r U W) \right] &= \\
\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_e}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu_e r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_e r \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] &+ S + S_T
\end{aligned}
\tag{IV.53}$$

onde,

$$\begin{aligned}
S &= 2 \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \mu \frac{W}{r^2} - \rho \frac{W V}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
S_T &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\mu_t}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + 2 \mu_t \frac{V}{r} - \frac{2}{3} \rho k \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - W \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_t \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \left[\mu_t \left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{W}{r} \right) \right]
\end{aligned}$$

- Média da Equação de Conservação da Massa:

Em função das tensões de Reynolds aparecerem unicamente devido às não linearidades das equações de transporte, e a equação da conservação da massa não possuir termos não lineares (quando considerado escoamento incompressível), a média temporal desta equação é obtida através da substituição direta das velocidades instantâneas pelas respectivas velocidades médias. Assim da equação IV.4, obtém-se,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\rho W) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho r V) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho r U) \right] = 0 \quad (\text{IV.54})$$